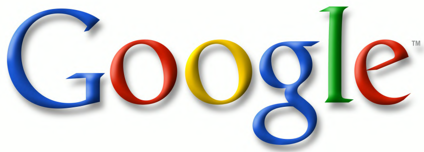
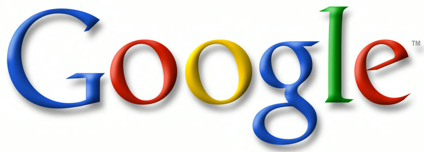








Kaethe Ziegler
stud. rer. nat.
Oct. 1896.

L. A. Sohncke's

Sammlung von Aufgaben

aus der

Differential- und Integralrechnung.

Erster Theil:
Differentialrechnung.

Herausgegeben

von

Prof. Dr. *Hermann Amstein.*
Professor der höheren Mathematik und theoretischen Mechanik
an der Akademie in Lausanne.

Fünfte verbesserte Auflage.

Halle,
Druck und Verlag von H. W. Schmidt.
1885.

L. A. Sohncke's

Sammlung von Aufgaben

aus der

Differentialrechnung.

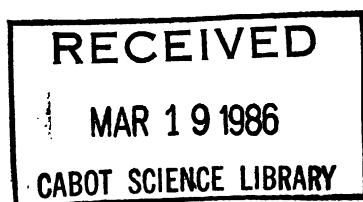
Fünfte verbesserte Auflage

herausgegeben

von

Prof. Dr. *Hermann Amstein*,
Professor der höheren Mathematik und theoretischen Mechanik
an der Akademie in Lausanne.

Halle,
Druck und Verlag von H. W. Schmidt.
1885.


RECEIVED
MAR 1 9 1986
CABOT SCIENCE LIBRARY

Vorwort zur vierten Auflage.

Die Aufgabensammlung von Sohncke hat durch drei Auflagen hindurch ihre Brauchbarkeit bewährt. Wie sie manchem Lehrer beim Unterricht in der Differential- und Integralrechnung als Sammlung von zweckmässigen Beispielen lieb geworden ist, so hat sie auch vielen Studirenden an Universitäten und polytechnischen Schulen willkommenes Uebungsmaterial geliefert. Dass Einzelnes, wie es in den bisherigen Auflagen enthalten ist, den durch das jetzt allgemeiner verbreitete und intensiver gewordene Studium der mathematischen Wissenschaften so hoch gesteigerten Anforderungen gegenüber nicht mehr denselben Werth besitzt, wie beim ersten Erscheinen des Buches und Anderes geradezu veraltet ist, liegt in der Natur der Sache. Nichtsdestoweniger schien mir das Buch des Brauchbaren und Werthvollen so viel zu enthalten, dass ich auf den Wunsch des Herrn Verlegers die Besorgung der vierten Auflage gern übernahm. Ich verhehlte mir dabei die eigenthümliche Schwierigkeit nicht, die darin lag, bei Berücksichtigung des ursprünglichen Charakters des Buches den Bedürfnissen der Jetztzeit möglichst gerecht zu werden.

Mein Hauptaugenmerk musste dahin gehen, den Mängeln möglichst abzuhelfen, welche sich bei langjährigem Gebrauche des Buches herausgestellt hatten. So sind sämmtliche, die einzelnen Beispielgruppen einleitenden Erklärungen, Regeln u. s. w. vollständig umgearbeitet worden. Sodann habe ich, um eine möglichst grosse Correctheit zu erzielen, sämmtliche Beispiele auf's Neue selbst durchgerechnet und die dabei aufgefundenen, zahlreichen Fehler verbes-

sert. Die Lösung derjenigen Aufgaben, welche erfahrungsgemäss den Studirenden grössere Schwierigkeiten darboten, ist noch mehr als in früheren Ausgaben durch kurze Anleitungen erleichtert worden; auch habe ich, wo mir diess nöthig schien, die Anzahl der Beispiele vermehrt. Die mannigfaltigen grösseren und kleineren Aenderungen, welche ich nach sorgfältiger Ueberlegung und bei möglichster Schonung des vorhandenen Guten im Interesse der Sache vornehmen zu müssen glaubte, hier anzugeben würde zu weit führen. Der unparteiische Sachverständige wird diese Aenderungen und die Gründe, die mich hierbei geleitet haben, wie ich hoffe, billigen.

Der erste Abschnitt über die Differentialquotienten algebraischer und transcendenter Functionen, der sich durch die Reichhaltigkeit und Brauchbarkeit seiner Beispiele vor allen andern auszeichnete, ist nahezu unverändert beibehalten worden. Im früheren vierten, jetzigen fünften Abschnitt wurden jeder wichtigeren unendlichen Reihe die Gültigkeitsgrenzen beigesetzt; dagegen konnten auch in dieser neuen Ausgabe Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen, als in die algebraische Analysis gehörig, selbstverständlich keine Aufnahme finden. Die kurze Anleitung zur näherungsweisen Lösung numerischer Gleichungen mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes, welche diesem Abschnitt beigegeben ist, wird manchem Studirenden nicht unwillkommen sein. Der fünfte Abschnitt der dritten Auflage über die hyperbolischen Functionen konnte bei dem beschränkten Raume des Buches nicht mehr aufgenommen werden. Die Untersuchung der Curven und Oberflächen ist, soweit dies thunlich erschien, den neueren Anforderungen an Symmetrie entsprechend umgebarbeitet worden.

Seit dem ersten Erscheinen der Sohncke'schen Aufgabensammlung im Jahre 1850 ist dieselbe für viele der nachfolgenden, ähnlichen Sammlungen, auch für solche, welche jetzt vornehm auf ihre Vorgängerin glauben herabblicken zu müssen, zu einer reichen Fundgrube geworden, so dass es gewiss in der Natur der Sache liegt, wenn jetzt die Zinsen und Zinseszinsen des von Sohncke angelegten

Capitals dem Buche selbst wieder zugeflossen sind. Es haben dem Bearbeiter der vierten Auflage namentlich die beiden trefflichen französischen Uebungsbücher Brahy: Exercices méthodiques de calc. diff. und Frenet: Recueil d'exercices sur le calc. infinitésimal, sowie die englischen Lehrbücher Tothunter: A treatise on the differential calculus und Salmon: Analytische Geometrie des Raumes (deutsch bearbeitet von Herrn Prof. Fiedler) wesentliche Dienste geleistet.

Auf die Correctur der einzelnen Druckbogen ist sowohl von Seite des Herrn Verlegers, wie auch von Seite des Herausgebers die grösste Sorgfalt verwendet worden. Die dessenungeachtet stehen gebliebenen, wenigen Druckfehler bitte ich vor dem Gebrauche des Buches verbessern zu wollen.

Zürich, im October 1874.

H. Amstein.

Inhalt.

Capitel I.

Differentiale erster Ordnung von entwickelten Functionen einer unabhängigen Veränderlichen.

§. 1. Grundformeln und allgemeine Regeln.

Bezeichnen $u, v, w, \ldots$ Functionen der unabhängigen Veränderlichen x und sind $du, dv, dw, \ldots$ die Differentiale dieser Functionen und A, B, $C, \ldots$ Constanten, so gelten folgende allgemeinen Gesetze:

I. $d(u \pm v \pm w \pm \ldots) = du \pm dv \pm dw \pm \ldots$

Zusatz. $dC = 0$

II. $d(Au) = Adu$

Zusatz. $d(Au + Bv + Cw + \ldots) = Adu + Bdv + Cdw + \ldots$

III. $d(uv) = udv + vdu$

Zusatz 1. $d(uvw) = vwdu + uwdv + uvdw$

Zusatz 2. $\frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$

Das Differential einer Function, dividirt durch die Function, wird das logarithmische Differential dieser Function genannt.

IV. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Zusatz 1. $d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{dv}{v^2}$.

Zusatz 2. $\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{\frac{u}{v}} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}$

V. $d(u^n) = nu^{n-1}du$,

wo n irgend eine positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahl bedeutet, welche von x unabhängig ist.

Zusatz 1. $d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

Zusatz 2. $\frac{d(u^n)}{u^n} = n\,\frac{du}{u}$.

Ist u eine Function von x und $F(u)$ eine Function von u, so wird $F(u)$ eine mittelbare Function von x genannt, und es gilt der Satz:

$$\text{VI.} \quad d_x F(u) = F'(u) d_x u,$$

wo $F'(u) = \frac{dF}{du}$ die in Bezug auf u genommene Ableitung von $F(u)$ bezeichnet und die den Differentialzeichen beigesetzte Marke $_x$ andeutet, dass diese Differentiale in Beziehung auf die unabhängige Variable x zu nehmen sind.

Ist $y = f(x)$, und bezeichnet man diejenige Function von y, welche für jeden Werth von y den aus der Gleichung $y = f(x)$ hervorgehenden Werth von x angibt, mit $\varphi(y)$, so dass also $f[\varphi(y)] = y$ ist, so heisst diese Function $\varphi(y)$ die inverse Function der Function $f(x)$, und es gilt die Gleichung:

$$\text{VII.} \qquad d\varphi(y) = \frac{dy}{f'(x)}.$$

§. 2. Beispiele zur Differentiation einfacher algebraischer Functionen.

1) $y = x^n$
$dy = nx^{n-1}dx$

2) $y = a . x^n$
$dy = n . a . x^{n-1}dx$

3) $y = \frac{x^n}{a} + b$
$dy = \frac{n}{a}x^{n-1}dx$

4) $y = (a+bx)^m$
$dy = mb(a+bx)^{m-1}dx$

5a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6 + \frac{4}{7}x^7$
$dy = x^2(1 - 6x + 13x^2 - 12x^3 + 4x^4)dx$

5b) $y = \frac{1}{m}x^m - px^{p-1} + q$
$dy = [x^{m-1} - p(p-1)x^{p-2}]dx$

6a) $y = 9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11} - ax^{-m}$
$dy = (63x^6 - 15x^{-6} + 33x^{-12} + amx^{-(m+1)})dx$

6b) $y = 3x^{\frac{7}{3}} - 4x^{1\frac{3}{4}} + 9x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{7}x^{-3\frac{1}{2}} + 7.5^{-\frac{3}{2}}$

$dy = (7x^{\frac{4}{3}} - 7x^{\frac{3}{4}} + 6x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-4\frac{1}{2}})dx$

7) $y = [a + bx + cx^2 + ex^3]^m$

$dy = m(b + 2cx + 3ex^2)(a + bx + cx^2 + ex^3)^{m-1}dx$

8) $y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{x\sqrt[3]{x^2}}{5} + \frac{m}{n}\sqrt[m]{x^n} - \frac{p}{\sqrt[p]{x^q}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[m]{2^q}$

$dy = \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{x^4} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2} + \frac{\sqrt[m]{x^n}}{x} + \frac{q}{x\sqrt[p]{x^q}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)dx$

9) $y = \sqrt[n]{(a + bx + cx^2 + ex^3)^m}$

$dy = \frac{m}{n}(b + 2cx + 3ex^2)\sqrt[n]{(a + bx + cx^2 + ex^3)^{m-n}}\,dx$

oder $= \frac{m(b + 2cx + 3ex^2)dx}{n\sqrt[n]{(a + bx + cx^2 + ex^3)^{n-m}}}$

10) $y = \frac{1}{a - bx + cx^2} + \frac{e}{(m + nx^3 + px^5)^2}$

$dy = \left[\frac{b - 2cx}{(a - bx + cx^2)^2} - \frac{2ex^2(3n + 5px^2)}{(m + nx^3 + px^5)^3}\right]dx$

11) $y = (a + bx)(c + ex)$

$dy = (ae + bc + 2bex)dx$

12) $y = \frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30\sqrt[15]{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{7}{\sqrt[5]{3^4}}$

$dy = \left(8\sqrt[5]{x^3} + \frac{2\sqrt[15]{x}}{x} - \frac{2}{x\sqrt[3]{x}}\right)dx$

13) $y = 27x^3 - \frac{81}{2}x^2\sqrt[3]{x^2} + 12x^2 + \frac{12}{5}x\sqrt[3]{x^2}$

$dy = (81x^2 - 108x\sqrt[3]{x^2} + 24x + 4\sqrt[3]{x^2})dx = (9x - 6\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})^2 dx$

14) $y = 2\sqrt[3]{x}\left[\frac{54}{5}x\sqrt[3]{x} + \frac{108}{11}x\sqrt{x} + \frac{27}{7}\sqrt[6]{x^5} + \frac{72}{7}\sqrt[4]{x} + 9 - \frac{\sqrt[6]{x}}{x}\right]$

$dy = \left(36\sqrt[3]{x^2} + 36\sqrt[6]{x^5} + 9\sqrt[6]{x} + \frac{12}{\sqrt[12]{x^5}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$

15) $y = \frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5} - \frac{18}{17}x^2\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x}$

$dy = \sqrt[6]{x^5}(4 - 3x + x\sqrt{x})dx = \sqrt[6]{x^5}(\sqrt{x} + 1)(2 - \sqrt{x})^2 dx$

16) $y = x^3\left[\tfrac{2}{11}x^2\sqrt{x} - \dfrac{72x}{23\sqrt[6]{x}} + \tfrac{16}{3}\right]$

$dy = x^2(x^2\sqrt{x} - 12\sqrt[6]{x^5} + 16)dx = x^2(\sqrt[6]{x^5} - 2)^2(\sqrt[6]{x^5} + 4)\,dx$

17) $y = (6x^2 - \tfrac{4}{5}x^5)^4$

$dy = 4x^7(12 - x^3)(6 - \tfrac{4}{5}x^3)^3dx$

18) $y = \sqrt[3]{3x - 2x^2}$

$dy = \dfrac{1 - \frac{4}{3}x}{\sqrt[3]{(3x - 2x^2)^2}}\,dx$

19) $y = \sqrt[4]{(2x^2 - x^3)^3}$

$dy = \dfrac{3x(4 - 3x)}{4\sqrt[4]{2x^2 - x^3}}\,dx$

20) $y = \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{3x} + 3x^2}$

$dy = \dfrac{1 + 2x\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\sqrt[3]{(4 + 2\sqrt{3x} + 3x^2)^2}}\,dx$

21) $y = \sqrt[4]{(3 + 4\sqrt[3]{2x})^3}$

$dy = \dfrac{\sqrt[3]{2}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{3 + 4\sqrt[3]{2x}}}$

22) $y = \sqrt[4]{\left\{2\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - x)^2}\right\}^3}$

$dy = \dfrac{\frac{3}{4}(x + 1)\sqrt[3]{1 - x} - \frac{1}{2}x\sqrt{x}}{x\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{1 - x}\sqrt[4]{2\sqrt{x}(x - 1) + x\sqrt[3]{(1 - x)^2}}}\,dx$

23) $y = \sqrt[5]{(a + x^2)^4}\sqrt[3]{(a + x^2)^2}$

$dy = \tfrac{44}{15}x\sqrt[15]{(a + x^2)^7}\,dx$

25) $y = \sqrt{(a^2 + ax + x^2)(a - x)}$

$dy = -\dfrac{3x^2dx}{2\sqrt{a^3 - x^3}}$

24) $y = (5 + 3x)\sqrt{6x - 5}$

$dy = \dfrac{27x\,dx}{\sqrt{6x - 5}}$

26) $y = (3x^2 + 5ax - 2a^2)\sqrt{a^2 + 3x^2}$

$dy = \dfrac{5a^3 + 30ax^2 + 27x^3}{\sqrt{a^2 + 3x^2}}\,dx$

27) $y = (9a^2 - 6abx + 5b^2x^2)\sqrt[3]{(a + bx)^2}$

$dy = \dfrac{40b^3x^2dx}{3\sqrt[3]{a + bx}}$

28) $y = (2a + 3bx)(2a - 3bx)^2\sqrt{4a + 6bx}$

$dy = \tfrac{3}{2}b(3bx - 2a)(21bx + 2a)\sqrt{6bx + 4a}\,dx$

29) $y = x(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}$

$dy = \dfrac{a^4 + a^2x^2 - 4x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$

30) $y = (x + \sqrt{1 + x^2})\sqrt{1 + x^2}$

$dy = \dfrac{(x + \sqrt{1 + x^2})^2}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$

31) $y = \dfrac{1}{x}\sqrt{a^2 - x^2}$

$dy = -\dfrac{a^2dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}$

32) $y = (40-12x+\frac{27}{5}x^2)\sqrt{5+3x}$

$dy = \dfrac{81x^2dx}{2\sqrt{5+3x}}$

33) $y = (\frac{10}{8}-2x+x^2)\sqrt{(5+2x)^3}$

$dy = 7x^2\sqrt{5+2x}\;dx$

34) $y = (4x-7)(3x+7)\sqrt[3]{3x+7}$

$dy = 28x\sqrt[3]{3x+7}\;dx$

35) $y = \left\{\dfrac{2}{3x^3}+\dfrac{28}{27x}\right\}\sqrt{7x^2-9}$

$dy = \dfrac{18dx}{x^4\sqrt{7x^2-9}}$

36) $y = \left\{\dfrac{3}{x^7}+\dfrac{2}{x^5}\right\}\sqrt{(3-5x^2)^5}$

$dy = -\dfrac{63}{x^8}\sqrt{(3-5x^2)^3}\,dx$

37) $y = \left[\dfrac{2}{27x}-\dfrac{1}{9x^2}\right]\sqrt{3x+x^2}$

$dy = \dfrac{dx}{2x^2\sqrt{3x+x^2}}$

38) $y = (8x^3-21)\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}$

$dy = \dfrac{160x^5dx}{\sqrt[3]{7+4x^3}}$

39) $y = (3x^4+4)\sqrt[4]{9x^4-3}$

$dy = \dfrac{135x^7dx}{\sqrt[4]{(9x^4-3)^3}}$

40) $y = \left\{7-\dfrac{6}{x^2}\right\}\sqrt[7]{\left(3+\dfrac{6}{x^2}\right)^3}$

$dy = \dfrac{720dx}{7x^5\sqrt[7]{\left(3+\dfrac{6}{x^2}\right)^4}}$

41) $y = (\frac{96}{77}-\frac{8}{11}\sqrt[9]{4x^5}+\frac{1}{3}x\sqrt[9]{16x})\sqrt[4]{(3+\sqrt[9]{4x^5})^7}$

$dy = \frac{25}{36}\sqrt[8]{4x^2}\sqrt[4]{(3+\sqrt[9]{4x^5})^3}dx$

42a) $y = \dfrac{1}{a^2-ax+x^2}$

$dy = \dfrac{a-2x}{(a^2-ax+x^2)^2}\,dx$

42b) $y = \dfrac{x^3-1}{x-1}$

$dy = (2x+1)\,dx$

42c) $y = \dfrac{x^3+ax^2+ax+1}{x+1}$

$dy = (2x+a-1)\,dx$

43) $y = \dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$

$dy = -\dfrac{4a^2xdx}{(a^2+x^2)^2}$

44) $y = \dfrac{5+3x+x^2}{5-3x+x^2}$

$dy = \dfrac{6(5-x^2)dx}{(5-3x+x^2)^2}$

45) $y = \dfrac{(8x^4+4x^2+3)\sqrt{x^2-1}}{15x^5}$

$dy = \dfrac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}$

46) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$dy = \dfrac{a^2\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$

47) $y = \sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$

$dy = -\dfrac{2a^2x\,dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^4-x^4}}$

48) $y = x\sqrt{\dfrac{a+bx}{a-bx}}$

$dy = \dfrac{a^2+abx-b^2x^2}{(a-bx)\sqrt{a^2-b^2x^2}}\,dx$

49) $y = \dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$dy = \dfrac{[\sqrt{1+x^2}-x]^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$

50) $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}$

$dy = \dfrac{2[\sqrt{1+x^2}+x]^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$

51) $y = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$dy = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$

52) $y = \dfrac{5b^3x^3+30ab^2x^2+40a^2bx+16a^3}{(a+bx)^2\sqrt{a+bx}}$

$dy = \dfrac{5b^4x^3dx}{2(a+bx)^3\sqrt{a+bx}}$

53) $y = \dfrac{\sqrt{(4x^3-5)^3}}{\sqrt[3]{(5x^2+1)^2}}-\sqrt{4(2^3-5)}$

$dy = \dfrac{[190x^4+54x^2+100x]\sqrt{4x^3-5}}{3\sqrt[3]{(5x^2+1)^5}}\,dx$

54) $y = \dfrac{2x^4}{(9x-13)^3\sqrt{9x^2-13x}}$

$dy = -\dfrac{91x^3dx}{(9x-13)^4\sqrt{9x^2-13x}}$

55) $y = \dfrac{108-18\sqrt{x}-3x-\frac{5}{6}x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{x}}}$

$dy = \dfrac{10x\,dx}{9\sqrt[3]{(2-\sqrt{x})^4}}$

56) $y = \dfrac{\frac{9}{320}x^4-\dfrac{1}{8x^2}}{\sqrt[3]{(20-3x^6)^2}}$

$dy = \dfrac{5dx}{x^3\sqrt[3]{(20-3x^6)^5}}$

57) $y = \dfrac{\dfrac{3}{x^3}+20x^3+\frac{200}{9}x^9}{\sqrt{(3+5x^6)^3}}$

$dy = -\dfrac{27dx}{x^4\sqrt{(3+5x^6)^5}}$

58) $y = [\sqrt{x^3}-\frac{1}{40}]\sqrt[3]{(\frac{1}{4}+6\sqrt{x^3})^5}$

$dy = 24x^2\sqrt[3]{(\frac{1}{4}+6\sqrt{x^3})^2}\,dx$

59) $$y = \frac{1}{5\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^5}} - \frac{1}{8\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^8}}$$

$$dy = \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{(x^3+1)^{11}}}$$

60) $$y = \sqrt[8]{5+7\sqrt{x}}\left\{\frac{9(5-21\sqrt{x})}{50\sqrt[8]{x^2}} + \tfrac{3}{44}(7\sqrt{x}-15)\right\}$$

$$dy = \frac{2\sqrt[3]{x^5}-3}{\sqrt[8]{x^5(5+7\sqrt{x})^2}}\,dx$$

§. 3. Definitionen und Grundformeln.

Die einfachsten transcendenten Functionen sind diejenigen, welche aus der Exponentialfunction, aus den trigonometrischen Functionen und aus der Umkehrung dieser Functionen, nämlich aus den Logarithmen und den cyklometrischen Functionen hervorgehen.

Die Exponentialfunction e^x ist definirt durch die für jeden endlichen Werth von x unbedingt convergente Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \text{ in inf.},$$

wobei $$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots \text{ in inf.} = 2{,}718281828\ldots$$

Aus der Umkehrung der Exponentialfunction e^x gehen die natürlichen Logarithmen (Neper'sche oder auch hyperbolische Logarithmen), deren Basis e ist, hervor, so dass,

wenn $$y = e^x,$$
$$x = \text{log. nat. } y.$$

In der Folge werden die natürlichen Logarithmen durch ein dem Logarithmanden vorgesetztes l bezeichnet.

Die Logarithmen in Beziehung auf die Basis 10, welche durch ein dem Logarithmanden vorgesetztes log bezeichnet werden sollen, werden Brigg'sche oder gemeine Logarithmen genannt.

Zwischen dem Brigg'schen und dem natürlichen Logarithmus einer Zahl z besteht die Beziehung

$$\log z = \frac{lz}{l10}$$

Allgemein gilt zwischen den Logarithmen einer Zahl z in Beziehung auf die zwei Grundzahlen a und b der Satz

$$\overset{b}{\log} z = \frac{\overset{a}{\log} z}{\overset{a}{\log} b},$$

woraus folgt $$\overset{b}{\log} a \,.\, \overset{a}{\log} b = 1.$$

Die constante Zahl $\frac{1}{lb} = \overset{b}{\log} e$, mit welcher man den natürlichen Logarithmus einer Zahl z multipliciren muss, um den Logarithmus der nämlichen Zahl z in Beziehung auf die Basis b zu erhalten, heisst **Modulus** des zur Basis b gehörenden Logarithmensystems.

Es ist demnach der Modulus des Brigg'schen Logarithmensystems

$$\frac{1}{l10} = \log e = 0{,}434294482\ldots$$

Umgekehrt findet man den natürlichen Logarithmus einer Zahl, indem man den Brigg'schen Logarithmus derselben mit dem reciproken Werthe des Modulus

$$\frac{1}{\log e} = l10 = 2{,}302585093\ldots$$

multiplicirt. Die Multipla dieser beiden Zahlen, deren Kenntniss die wirkliche Berechnung abkürzt, findet man in jeder gut eingerichteten Logarithmentafel.

Die Erklärung der **trigonometrischen** Functionen entlehnt die Analysis der Goniometrie. Während aber in der Goniometrie die unabhängige Variable gewöhnlich als eine Winkelgrösse (ausgedrückt in Graden, Minuten und Secunden) betrachtet wird, zieht man es in der Analysis vor, die Länge des auf einem Kreise mit dem Radius 1 diesem Winkel als Centriwinkel entsprechenden Bogens (ausgedrückt in Theilen des Halbmessers) als unabhängige Variable einzuführen.

Zur Verwandlung von Winkelmass in Bogenmass dienen die Gleichungen $\text{arc}\, 360^0 = 2\pi$, $\text{arc}\, 180^0 = \pi$, $\text{arc}\, 90^0 = \frac{1}{2}\pi$,

$$\text{arc}\, 1^0 = \frac{\pi}{180} = 0{,}017453293\ldots,\quad \text{arc}\, 1' = \frac{\pi}{180\,.\,60} = 0{,}000290888\ldots,$$

$$\text{arc}\, 1'' = \frac{\pi}{180\,.\,60\,.\,60} = 0{,}000004848\ldots$$

Die Multipla dieser Zahlen findet man in den Logarithmentafeln. Mit Hülfe dieser Zahlen ergibt sich z. B., dass einem Bogen von der Länge 1 ein Winkel von $57^0\ 17'\ 44'',806 = 206264'',8$ entspricht. Der Brigg'sche Logarithmus der letzteren Zahl, welcher mitunter gebraucht wird, ist 5,3144251.

Einige Schriftsteller haben für folgende rationalen Functionen der Exponentialfunction e^x

$$\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}),\ \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

die besonderen Benennungen sinus hyperbolicus von x und cosinus hyp. von x und die besonderen Zeichen

$$\mathfrak{Sin}\, x \text{ und } \mathfrak{Cos}\, x$$

eingeführt. Eine wesentliche Abkürzung wird hierdurch nicht erreicht.

Die inversen Functionen der trigonometrischen sind die cyklometrischen Functionen $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, etc.

Unter $\operatorname{arc\,sin} x$, resp. $\operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{arc\,cotang} x$ ist derjenige zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegende Bogen des Kreises mit dem Radius 1 zu verstehen, dessen sinus, resp. tangens, cotangens gleich x ist. Mit $\operatorname{arc\,cos} x$ wird derjenige zwischen 0 und π liegende Bogen des Kreises mit dem Radius 1 bezeichnet, dessen cosinus gleich x ist.

Unter diesen Voraussetzungen gelten folgende Differentiationsvorschriften, wobei u eine beliebige Function von x bedeutet:

VIII. $d(e^u) = e^u du$

Zusatz. $d(a^u) = a^u la\, du$

IX. $d(lu) = \frac{du}{u}$

Zusatz 1. $d\overset{a}{\log} u = \frac{1}{la} \cdot \frac{du}{u}$

Zusatz 2. $du = ud(lu)$

X. $d(\sin u) = \cos u\, du$

XI. $d(\cos u) = -\sin u\, du$

XII. $d(\operatorname{tang} u) = \frac{du}{\cos^2 u} = (1 + \operatorname{tang}^2 u) du$

XIII. $d(\operatorname{cotang} u) = -\frac{du}{\sin^2 u} = -(1 + \operatorname{cotang}^2 u)\, du$

XIV. $d(\sec u) = \frac{\sin u}{\cos^2 u}\,du = \sec u \operatorname{tang} u\,du$

XV. $d(\operatorname{cosec} u) = -\frac{\cos u}{\sin^2 u}\,du = -\operatorname{cosec} u \operatorname{cotang} u\,du.$

Die Formeln X—XIII liefern nach dem Satze über die Differentiation der inversen Functionen folgende weiteren:

XVI. $d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

XVII. $d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

XVIII. $d(\operatorname{arctang} u) = \frac{du}{1+u^2}$

XIX. $d(\operatorname{arccotang} u) = -\frac{du}{1+u^2}.$

§. 4. Beispiele zur Differentiation transcendenter Functionen.

1) $y = l(1+x^2)$

$dy = \frac{2x\,dx}{1+x^2}$

2) $y = l\frac{x}{1-x^2}$

$dy = \frac{1+x^2}{x(1-x^2)}\,dx$

3) $y = l\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + l\frac{2}{3}$

$dy = \frac{dx}{x(1+x^2)}$

4) $y = l\frac{1+x}{1-x}$

$dy = \frac{2dx}{1-x^2}$

5) $y = l(x+\sqrt{1+x^2})$

$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

6) $y = l\frac{x^2-2}{\sqrt{(6-2x^2)^3}}$

$dy = \frac{x^3\,dx}{(x^2-2)(3-x^2)}$

7) $y = l\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)$

$dy = \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

8) $y = l\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$

$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

9) $y = l\sqrt{\frac{\sqrt{3}-x\sqrt{7}}{\sqrt{3}+x\sqrt{7}}}$

$dy = \frac{\sqrt{21}\,dx}{7x^2-3}$

10) $y = l\frac{x^2(2x+4)^7}{(6+7x+2x^2)(2x+3)^7}$

$dy = \frac{12\,dx}{x(6+7x+2x^2)}$

11) $$y = l\,\frac{\sqrt[21]{(x+4)^{13}}\,\sqrt[28]{(x-3)^{13}}}{\sqrt[12]{x+1}}$$

$$dy = \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2-11x-12}\,dx$$

12) $$y = l\left\{\frac{\sqrt[6]{(x^2+3x-7)^{17}}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\ \sqrt[6\sqrt{37}]{\left(\frac{2x+3+\sqrt{37}}{2x+3-\sqrt{37}}\right)^{29}}\right\}$$

Man setze: $\frac{2x+3+\sqrt{37}}{2}=z$, $\frac{2x+3-\sqrt{37}}{2}=t$, $x-1=v$,

alsdann wird:

$$dy = \frac{5x^2-4x+1}{x^3+2x^2-10x+7}\,dx$$

13) $$y = \frac{x^3-\frac{96}{25}x+\frac{288}{125}}{(4-5x)^2}+\frac{12}{125}\,l(4-5x)$$

$$dy = \frac{5x^3\,dx}{(5x-4)^3}$$

14) $$y = \frac{\frac{1}{x}+\frac{125}{12}+\frac{65}{3}\,x+\frac{35}{2}x^2+5x^3}{(1+x)^4}+5\,l\,\frac{x}{1+x}$$

$$dy = -\frac{dx}{x^2(1+x)^5}$$

15) $$y = \frac{245x-18}{294(3-7x^2)}+\frac{5}{6\sqrt{21}}\ l\left\{\frac{\sqrt{3}+x\sqrt{7}}{\sqrt{3-7x^2}}\right\}-\frac{1}{49}\,l(3-7x^2)$$

$$dy = \frac{5-2x^3}{(3-7x^2)^2}\,dx$$

16) $$y = \left\{\frac{1}{5x^2}-\frac{5}{12}+\frac{13x^2}{75}-\frac{7x^4}{250}+\frac{x^6}{625}\right\}\frac{1}{(x^2-5)^4}-\frac{1}{3125}\,l\,\frac{x^2}{x^2-5}$$

$$dy = \frac{2\,dx}{x^3(x^2-5)^5}$$

17) $$y = [lu]^n$$

$$dy = n\,[lu]^{n-1}\cdot\frac{1}{u}\cdot du_x$$

18) $$y = ax^m\,l(bx^n)$$

$$dy = ax^{m-1}\left[m\,l(bx^n)+n\right]dx$$

19) $$y = ax^m\,[l(bx^n)]^p$$

$$dy = ax^{m-1}\,[l(bx^n)]^{p-1}.\left[m\,l(bx^n)+pn\right]dx$$

20) $y = \frac{x^2(x^3-4)}{\sqrt[3]{(l2x)^2}}$

$dy = \frac{x(5x^3-8).l2x-\frac{2}{3}x(x^3-4)}{\sqrt[3]{(l2x)^5}}dx$

21) $y = e^x.x^n$

$dy = e^x(nx^{n-1}+x^n)\,dx$

22) $y = a^{2x^3-3x^2}$

$dy = 6x(x-1)\,a^{2x^3-3x^2}\,la\,dx$

23) $y = e^x(x^3-3x^2+6x-6)$

$dy = x^3.e^x\,dx$

24) $y = x^x$

$dy = x^x(1+lx)\,dx$

25) $y = (4x+5x^3)^{3x^2-2x}$

$dy = (4x+5x^3)^{3x^2-2x}\left\{\frac{(3x-2)(4+15x^2)}{4+5x^2}+(6x-2)l(4x+5x^3)\right\}dx$

26) $y = l[(3x-7x^3)^{5x-2}]$

$dy = \left[\frac{(5x-2)(3-21x^2)}{3x-7x^3}+5l(3x-7x^3)\right]dx$

27) $y = l(lu)$

$dy = \frac{1}{u\,l\,u}\,.\,du_x$

28) $y = (4x-3)\,l\left\{\frac{3}{x}+4x+l\left(\frac{4x-3}{x^2+x}\right)\right\}$

$dy = \left[4l\left\{\frac{3}{x}+4x+l\left(\frac{4x-3}{x^2+x}\right)\right\}+\frac{16x^4-18x^2+9}{x(x+1)\left\{3+4x^2+x\,l\left(\frac{4x-3}{x^2+x}\right)\right\}}\right]dx$

29) $y = u^v$

$dy = u^v.lu.dv_x+v.u^{v-1}.du_x$

30) $y = l(u^v)$

$dy = lu.dv_x+\frac{v}{u}\,.\,du_x$

31) $y = (lu)^v$

$dy = \frac{v}{u}(lu)^{v-1}du_x+(lu)^v l\,lu dv_x$

32) $y = u^{(v^w)}$

$dy = u^{(v^w)}.v^w.lu\left[lv.dw_x+\frac{w}{v}\,.\,dv_x+\frac{1}{u\,lu}\,.\,du_x\right]$

33) $y = \sin^n x$

$dy = n\sin^{n-1}x\,.\cos x\,dx$

34) $y = \sin mx$

$dy = m.\cos mx\,dx$

35) $y = \sin(px+q)$

$dy = p.\cos(px+q)\,dx$

Wenn n eine grade Zahl ist, so ist:

$$\cos nx = \pm\left[1-\frac{n^2}{1.2}\cos^2 x+\frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4}\cos^4 x-\ldots\right]$$

Diese Gleichung auf beiden Seiten differentiirt und durch $(-n)$ dividirt, gibt:

$$\sin nx = \mp n \sin x \left[\cos x - \frac{n^2-4}{1.2.3}\cos^3 x + \frac{(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5}\cos^5 x \ldots\right]$$

Ist n ungrade, so hat man

$$\cos nx = \pm n \cos x \left[1 - \frac{n^2-1}{1.2.3}\cos^2 x + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5}\cos^4 x - \ldots\right],$$

woraus sich durch dasselbe Verfahren, wie oben, ergibt:

$$\sin nx = \pm \sin x \left[1 - \frac{n^2-1}{1.2}\cos^2 x + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4}\cos^4 x - \ldots.\right]$$

Die oberen Zeichen sind zu nehmen, wenn n von der Form $4a$ oder $4a+1$, die untern, wenn es von der Form $4a+2$ oder $4a+3$ ist.

Diese vier Formeln, welche in Cap. V abgeleitet werden, können in einigen der folgenden Beispiele zur Vereinfachung der durch die Differentiation unmittelbar erhaltenen Resultate dienen.

36) $y = \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{3}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x - 5\sin x$

$dy = (\cos 7x + 3\cos 5x + \cos 3x - 5\cos x)\,dx = -64\sin^2 x\cos^5 x\,dx$

37) $y = \frac{1}{8}\sin 8x + \frac{2}{3}\sin 6x + \sin 4x - 2\sin 2x - 5x$

$dy = (\cos 8x + 4\cos 6x + 4\cos 4x - 4\cos 2x - 5)\,dx$

$= -128\sin^2 x\cos^6 x\,dx$

38) $y = \frac{1}{9}\cos 9x + \frac{3}{7}\cos 7x - \frac{8}{3}\cos 3x - 6\cos x + \frac{1}{3}\cos(-\frac{5}{3})$

$dy = (-\sin 9x - 3\sin 7x + 8\sin 3x + 6\sin x)\,dx = 256\sin^3 x\cos^6 x\,dx$

39) $y = \frac{1}{10}\cos 10x + \frac{1}{2}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 6x - 2\cos 4x - 7\cos 2x$

$dy = -(\sin 10x + 4\sin 8x + 3\sin 6x - 8\sin 4x - 14\sin 2x)\,dx$

$= 512\sin^3 x\cos^7 x\,dx$

40) $y = x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x$

$dy = x^3 . \cos x\,dx$

41) $y = \operatorname{tang} x + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x$

$dy = \frac{dx}{\cos^4 x}$

42) $y = \left(\frac{2}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)\sin x$

$dy = \frac{8 - 3\cos^4 x}{\cos^5 x}\,dx$

43) $y = \operatorname{tang} x - \operatorname{cotg} x - 2x$

$dy = (\operatorname{tang}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x)\,dx$

44) $y = (\cos^2 x + \frac{2}{3})\sin^3 x$

$dy = 5\sin^2 x\cos^3 x\,dx$

45) $y = \frac{1}{3}\cos x \operatorname{cotg} x - \frac{1}{6}\cos 2x \sin x - \frac{3}{2}\sin x - \frac{4}{3}\operatorname{cosec} x$

$dy = \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}\,dx$

46) $y = \frac{15}{8}x + \operatorname{cotg} x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$

$dy = \left(\frac{15}{8} - \frac{1}{\sin^2 x} + \cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right)dx = -\frac{\cos^6 x}{\sin^2 x}\,dx$

47) $y = \frac{3\operatorname{cosec} x - 2\sin x}{5\cos^5 x} - \frac{16}{5}\operatorname{cotg} 2x$

$dy = \frac{dx}{\sin^2 x\cos^6 x} = \frac{\sec^2 x \,.\, \operatorname{cosec}^2 x}{\cos^4 x}\,dx$

48) $y = -\frac{1}{2\sin^2 x} + l\operatorname{tang} x + l\sin\frac{3}{4}$

$dy = \frac{dx}{\sin^3 x\,\cos x}$

49) $y = -\frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + l\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

$dy = \frac{dx}{\sin^4 x\,.\cos x} = \frac{\operatorname{tang} x}{\sin^5 x}\,dx$

50) $y = \frac{1}{3}\cos^3 x + \cos x + l\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$

$dy = \cos^3 x \operatorname{cotg} x\,dx$

51) $y = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 x + \cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^4 x + 3l\sin x$

$dy = -\frac{\cos^7 x}{\sin^3 x}\,dx$

52) $y = \frac{1}{5}\sin^2 x\cos^3 x - 1\frac{3}{5}\cos^3 x - 3\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x\operatorname{cosec} x - \frac{3}{2}l\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$

$dy = \frac{\cos^8 x}{\sin^3 x}\,dx$

53) $y = \frac{1}{4}\operatorname{tang}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 x - l\cos x$

$dy = \operatorname{tang}^5 x\,dx$

54) $y = -\frac{1}{4}\operatorname{cotg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x + l\sin x$

$dy = \operatorname{cotg}^5 x\,dx$

55) $y = \frac{1}{6}\operatorname{tang}^6 x - \frac{1}{4}\operatorname{tang}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 x + l\cos x$

$dy = \operatorname{tang}^7 x\,dx$

56) $y = \frac{23 + 18\cos 2x + 3\cos 4x}{48\cos^6 x} + l\operatorname{tang} x$

$dy = \frac{\sec x\,.\,\operatorname{cosec} x}{\cos^6 x}\,dx = \frac{dx}{\sin x\cos^7 x}$

57) $y = \dfrac{(3\cos 4x - 7)\operatorname{cotg} 2x}{(\sin 2x)^3} + 6\,.\,l\operatorname{tang} x$

$dy = \sec^5 x\,.\,\operatorname{cosec}^5 x\,dx$

58) $y = \dfrac{(-\frac{149}{6} + \frac{50}{8}\cos 4x - \frac{5}{2}\cos 8x)\operatorname{cotg} 2x}{(\sin 2x)^5} + 20\,l\operatorname{tang} x$

$dy = \sec^7 x\,.\,\operatorname{cosec}^7 x\,dx$

59) $y = \sin(m + nx)$

$dy = n\,.\cos(m + nx)\,dx$

60) $y = [\operatorname{tang}(p + qx)]^2$

$dy = \dfrac{2q\operatorname{tang}(p + qx)}{[\cos(p + qx)]^2}\,dx$

61) $y = x^2\,.\sec(px + qx^3)$

$dy = \dfrac{2x + x^2(p + 3qx^2)\operatorname{tang}(px + qx^3)}{\cos(px + qx^3)}\,dx$

62) $y = \dfrac{\sin x}{a + b\cos x}$

$dy = \dfrac{a\cos x + b}{(a + b\cos x)^2}\,dx$

63) $y = \dfrac{\sin^2 x}{a + b\cos^2 x}$

$dy = \dfrac{(a + b)\sin 2x}{(a + b\cos^2 x)^2}$

64) $y = l\,\dfrac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\,.\sin x}{a + b\cos x}$

$dy = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a + b\cos x}\,dx$

65) $y = e^{ax}(a\sin x - \cos x)$

$dy = (a^2 + 1)e^{ax}\,.\sin x\,dx$

66) $y = e^{ax}(a\cos x + \sin x)$

$dy = (a^2 + 1)\,e^{ax}\cos x\,dx$

67) $y = ae^{ax}\sin x\,(a\sin x - 2\cos x) + 2e^{ax}$

$dy = a(a^2 + 4)\,e^{ax}\sin^2 x\,dx$

68) $y = e^{ax}\cos^2 x\,(a\cos x + 3\sin x) + \dfrac{6e^{ax}(a\cos x + \sin x)}{a^2 + 1}$

$dy = (a^2 + 9)\,e^{ax}\cos^3 x\,dx$

69) $y = e^{3x}(3\sin x - \cos x) + e^{-4}(5\sin 2 - \cos 3)$

$dy = 10e^{3x}\,.\sin x\,dx$

70) $y = l\left\{\dfrac{e^x\sqrt{\cos x - e^{\sin x}} + e^{-x}\sqrt{\cos x + e^{\sin x}}}{e^x\sqrt{\cos x - e^{\sin x}} - e^{-x}\sqrt{\cos x + e^{\sin x}}}\right\}$

$dy = \dfrac{2e^{\sin x}(\cos^2 x + \sin x) - 4(\cos^2 x - e^{2\sin x})}{[\cos x\,(e^{2x} - e^{-2x}) - e^{\sin x}(e^{2x} + e^{-2x})]\sqrt{\cos^2 x - e^{2\sin x}}}\,dx$

71) $y = \arcsin\sqrt{x^3}$

$dy = \dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1 - x^3}}$

72) $y = \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2}$

$dy = \dfrac{2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

73) $y = \arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$dy = -\frac{dx}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$

74) $y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$dy = -\frac{2\,dx}{1+x^2}$

75) $y = x^3 \arcsin\frac{1}{x}$

$dy = x^2\left(3\arcsin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$

76) $y = \arcsin\frac{bx-a}{x\sqrt{b^2+a}}$

$dy = \frac{\sqrt{a}\,dx}{x\sqrt{x^2+2bx-a}}$

77) $y = \arcsin\sqrt{\frac{a+bx^2}{a+1+bx^2}}$

$dy = \frac{bx\,dx}{(a+1+bx^2)\sqrt{a+bx^2}}$

78) $y = \text{arctang}\,\frac{2x}{1-x^2}$

$dy = \frac{2\,dx}{1+x^2}$

79) $y = \text{arctang}\,\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

$dy = \frac{dx}{2(1+x^2)}$

80) $y = \text{arctang}\,\frac{2x+1}{x\sqrt{3}}$

$dy = -\frac{\sqrt{3}\,dx}{7x^2+4x+1}$

81) $y = \text{arctang}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

82) $y = \text{arctang}\,\frac{2x-1}{2\sqrt{1+x-x^2}}$

$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

83) $y = \text{arctang}\,\frac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

$dy = \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$

84) $y = \text{arctang}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$dy = \frac{1}{2}dx$

85) $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$

$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

86) $y = \arccos\sqrt{1-x}$

$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x-x^2}}$

87) $y = \arccos\frac{2\sqrt{x^2+x-1}}{x\sqrt{5}}$

$dy = \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$

88) $y = \sqrt{1-x^2} - x\,.\arcsin\sqrt{1-x^2}$

$dy = -\arcsin\sqrt{1-x^2}\,dx$

89) $y = (1 - \frac{1}{3}x^2)x . \text{arcsin}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}(7-x^2)\sqrt{1-x^2}$

$dy = (1-x^2)\,\text{arcsin}\,\sqrt{1-x^2}\,dx$

90) $y = \frac{1}{4}x^2 - [\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\,\text{arcsin}\,x] . \text{arcsin}\,x$

$dy = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} . \text{arcsin}\,x\,dx$

91) $y = [-(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}x)\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{16}\,\text{arcsin}\,x] . \text{arcsin}\,x + \frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{16}x^2$

$dy = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} . \text{arcsin}\,x\,dx$

92) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} . \text{arcsin}\,x + \frac{1}{2}l(1-x^2) - \text{arcsin}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$dy = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} . \text{arcsin}\,x\,dx$

93) $y = \frac{1}{x}\,\text{arcsin}\,\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}l\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$

$dy = -\frac{1}{x^2} . \text{arcsin}\,\sqrt{1-x^2}\,dx$

94) $y = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4})\,\text{arccos}\,x - \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$

$dy = x . \text{arccos}\,x\,dx$

95) $y = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - (1 - \frac{1}{2}x^2)\,\text{arctang}\sqrt{1-x^2}$

$dy = x\,\text{arctang}\sqrt{1-x^2}\,dx$

96) $y = \frac{1}{5}x^5\,\text{arctang}\,x - \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{10}l(1+x^2)$

$dy = x^4\,\text{arctang}\,x\,dx$

97) $y = [x - \frac{1}{2}\,\text{arctang}\,x] . \text{arctang}\,x - \frac{1}{2}l(1+x^2)$

$dy = \frac{x^2}{1+x^2}\,\text{arctang}\,x\,dx$

98) $y = \left\{\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\,\text{arctang}\,x\right\} . \text{arctang}\,x + \frac{1}{4(1+x^2)}$

$dy = \frac{1}{(1+x^2)^2} . \text{arctang}\,x\,dx$

99) $y = \left\{\frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{2}\,\text{arctang}\,\frac{2x}{1-x^2}\right\} . \text{arctang}\,\frac{2x}{1-x^2} - l\,\frac{1+x^2}{1-x^2}$

Man setze $2\,\text{arctang}\,x$ für $\text{arctang}\,\frac{2x}{1-x^2}$

$dy = \frac{16x^2}{(1-x^4)(1-x^2)} . \text{arctang}\,x\,dx$

100) $y = \operatorname{arctang} \operatorname{tang} l(x+\sqrt{x^2+a})$

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$$

101) $y = \left\{ \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right\}^{\operatorname{arctang} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}}$

Weil $\operatorname{arctang} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{1}{2} \operatorname{arctang} x$ und

$du_x = u . d(lu)_x$, so wird

$$dy = [\tfrac{1}{2} \operatorname{arctang} x]^{\frac{1}{2} \operatorname{arctang} x} \, d[\tfrac{1}{2} \operatorname{arctang} x . l \tfrac{1}{2} \operatorname{arctang} x]_x$$

$$= [\tfrac{1}{2} \operatorname{arctang} x]^{\frac{1}{2} \operatorname{arctang} x} \left\{ \frac{1 - l2 + l \operatorname{arctang} x}{2(1+x^2)} \right\} dx$$

102) $y = -\frac{\sin x}{2+\cos x} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arccos \frac{1+2\cos x}{2+\cos x}$

$$dy = \frac{3\,dx}{(2+\cos x)^2}$$

103) $y = \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x$

$$dy = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x} dx$$

104) $y = -\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) \operatorname{arctang} \frac{2p \sin x}{(m+n)+(m-n)\cos x}$

$$+\frac{1}{2q}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) \operatorname{arctang} \frac{2q \sin x}{(m-n)+(m+n)\cos x}$$

$$dy = \frac{dx}{a+b\cos x + c\cos 2x}$$

105) $y = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) \operatorname{arctang} \frac{2p \sin x}{(m+n)+(m+n)\cos x}$

$$-\frac{1}{2q}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) \operatorname{arctang} \frac{2q \sin x}{(m-n)+(m+n)\cos x}$$

$$dy = \frac{\cos x\,dx}{a+b\cos x + c\cos 2x}$$

In diesen beiden letzten Formeln ist $m^2 = a+b+c$; $n^2 = a-b+c$; $p^2 = \frac{1}{4}(m-n)^2 - 2c$; $q^2 = \frac{1}{4}(m+n)^2 - 2c$.

Capitel II.

Differentiale höherer Ordnungen von entwickelten Functionen einer unabhängigen Veränderlichen.

§. 5. Allgemeine Sätze über independente Darstellung der Differentialquotienten höherer Ordnungen entwickelter Functionen einer unabhängigen Veränderlichen.*)

Zur Abkürzung soll in der Folge das Product aller positiven ganzen Zahlen $1.2.3\ldots n$ nach Kramp mit $n!$ (n Facultät) und der Binomialcoefficient $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ r}$ mit n_r oder $(n)_r$ bezeichnet werden. Unter n_0 und $0!$ ist immer die Zahl 1 zu verstehen.

Bezeichnen u und v beliebige Functionen der unabhängigen Veränderlichen x, so gelten für die Bildung der Differentiale höherer Ordnungen folgende Vorschriften:

I. $d^n(u+v) = d^n u + d^n v$

II. $d^n(Au) = Ad^n u$,

wenn A eine von x unabhängige Grösse bezeichnet.

III. $d^n(uv) = ud^n v + n_1 du\, d^{n-1}v + n_2 d^2u\, d^{n-2}v + \ldots$

$$+ n_{n-1}d^{n-1}u\, dv + d^n u \,.\, v$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} n_k \cdot d^k u\, d^{n-k}v = \text{symb.}\ (du+dv)^n \quad (\text{Satz von } \textit{Leibnitz}).$$

Wie die symbolische Entwicklung von $(du+dv)^n$ nach dem binomischen Lehrsatze zu verstehen sei, erhellt aus der vorhergehenden ausführlichen Formel. Es möge noch hervorgehoben werden, dass d^0u und d^0v die Functionen u und v selbst bedeuten.

Bezeichnet $F(u)$ eine mittelbare Function von x, so gilt in dem speciellen Falle, wo u eine lineare Function von x ist, für jeden positiven, ganzzahligen Werth von n der Satz $d^n_x F(u) = F^{(n)}(u)\, d_x u^n$. (Vergl. Formel VI, §. 1 für $n = 1$.) Ist dagegen u irgend eine andere Function

*) Vergleiche Hoppe: Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten, Leipzig 1845.

von x, so werden im Allgemeinen die Differentiale du, d^2u, ... wieder Functionen von x sein, und man hat der Reihe nach, wenn man von der Lagrange'schen Bezeichnung $F'(u)$, $F''(u)$, ... $F^{(n)}(u)$ für die erste, zweite, ... $n$te in Bezug auf u genommene Ableitung der Function $F(u)$ Gebrauch macht:

$$\frac{dF(u)}{dx} = F'(u)\,\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d^2F(u)}{dx^2} = F'(u)\,\frac{d^2u}{dx^2} + F''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d^3F(u)}{dx^3} = F'(u)\,\frac{d^3u}{dx^3} + 3F''(u)\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + F'''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^3,$$

$$\frac{d^4F(u)}{dx^4} = F'(u)\,\frac{d^4u}{dx^4} + F''(u)\left[3\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 + 4\,\frac{du}{dx}\frac{d^3u}{dx^3}\right] + F'''(u)\,.\,6\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{d^2u}{dx^2} + F^{IV}(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^4$$

. . . .

und im Allgemeinen

$$\frac{d^nF(u)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} A_k F^{(k)}(u).$$

In dieser Formel bedeutet A_k eine von der Natur der Function F völlig unabhängige Function gewisser in Bezug auf die unabhängige Variable x genommener Differentialquotienten von u. Kann demnach A_k für eine specielle Function F bestimmt werden, so behält das Resultat seine Gültigkeit für jede beliebige Function F.

Setzt man z. B. $F(u) = u^h$, so wird

$$F^{(k)}(u) = \frac{d^k(u^h)}{du^k} = h(h-1)(h-2)\ldots(h-k+1)\,u^{h-k} = k!\,.\,h_k u^{h-k}.$$

Dann wird die obige Gleichung

$$\frac{d^n(u^h)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} k!\,h_k u^{h-k}.\,A_k.$$

Dividirt man beide Seiten durch u^h und beachtet, dass h für $k > h$ verschwindet, so ist

$$u^{-h}\,\frac{d^n(u^h)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=h} k!\,h_k u^{-k}.\,A_k$$

Setzt man für den Augenblick der Kürze wegen

$$u^{-h}\frac{d^n(u^h)}{dx^n} = w_h,$$

$$k!\,u^{-k}A_k = v_k,$$

so gibt die Gleichung

$$w_h = \sum_{k=1}^{k=h} h_k v_k.$$

Wenn man in dieser Gleichung der Reihe nach $h = 1, 2, 3 \ldots k$ einsetzt, so folgt:

$$w_1 = v_1$$
$$w_2 = 2v_1 + v_2$$
$$w_3 = 3v_1 + 3v_2 + v_3$$
$$w_4 = 4v_1 + 6v_2 + 4v_3 + v_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_k = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 \ldots . v_k.$$

Rückwärts erhält man hieraus leicht:

$$v_1 = w_1$$
$$v_2 = -2w_1 + w_2$$
$$v_3 = 3w_1 - 3w_2 + w_3$$
$$v_4 = -4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_k = (-1)^{k+1}k_1 w_1 + (-1)^k k_2 w_2 + \ldots . + w_k$$
$$= \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h}.\,k_h.\,w_h.$$

Setzt man für v und w ihre Werthe wieder ein, so findet sich

$$A_k = \frac{u^k}{k!}\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^{k+h}k_h u^{-h}\frac{d^n(u^h)}{dx^n},$$

und daher wird

$$\text{IV}^*.\quad \frac{d^n F(u)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} F^{(k)}(u)\,.\,\frac{u^k}{k!}\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^{k+h}k_h u^{-h}\frac{d^n(u^h)}{dx^n}.$$

Beachtet man, dass

$$\left(\frac{u}{\gamma}-1\right)^k = (-1)^k\left(1-\frac{u}{\gamma}\right)^k = (-1)^k\sum_{h=0}^{h=k}(-1)^h k_h \gamma^{-h}u^h,$$

und differentiirt man diese Gleichung n mal nach einander, indem man γ als Constante betrachtet, so folgt

$$\frac{d^n\left(\frac{u}{\gamma}-1\right)^k}{dx^n} = (-1)^k \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h \gamma^{-h} \frac{d^n(u^h)}{dx^n},$$

oder wenn nach der Differentiation $\gamma = u$ gesetzt wird:

$$\frac{d^n\left(\frac{u}{\gamma}-1\right)^k}{dx^n} \left\{\gamma = u\right\} = (-1)^k \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h u^{-h} \frac{d^n(u^h)}{dx^n}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung erhält die Formel IV* folgende, in manchen Fällen brauchbarere Gestalt:

$$\text{IV.} \quad \frac{d^n F(u)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{u^k}{k!} F^{(k)}(u) \frac{d^n\left(\frac{u}{\gamma}-1\right)^k}{dx^n} \left\{\gamma = u\right\}.$$

Die beigefügte Marke $\left\{\gamma = u\right\}$ soll andeuten, dass die Grösse γ während der Differentiation in Bezug auf x als constant zu behandeln und nach Ausführung derselben durch u zu ersetzen ist.

Macht man in dieser Gleichung $u = x^2$, so erhält man einen Ausdruck für $\frac{d^n F(x^2)}{dx^n}$, dessen Umformung jedoch einige Weitläufigkeiten verursacht. Es wird daher zur Herstellung der $n$ten Ableitung von $F(x^2)$ der Weg der Induction vorzuziehen sein.

Setzt man $y = F(x^2)$,

so wird

$$\frac{dy}{dx} = 2xF'(x^2),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2x)^2F''(x^2) + 2F'(x^2),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (2x)^3F'''(x^2) + 6(2x)F''(x^2),$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = (2x)^4F^{IV}(x^2) + 12(2x)^2F'''(x^2) + 12F''(x^2),$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = (2x)^5F^{V}(x^2) + 20(2x)^3F^{IV}(x^2) + 60(2x)F'''(x^2),$$

. . . .

$$\text{IVa.} \quad \frac{d^nF(x^2)}{dx^n} = (2x)^nF^{(n)}(x^2) + n(n-1)(2x)^{n-2}F^{(n-1)}(x^2) + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4}F^{(n-2)}(x^2) + \cdots \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2p+1)}{1.2\ldots p}(2x)^{n-2p}F^{(n-p)}(x^2) + \cdots$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann durch den Schluss von n auf $(n+1)$ erwiesen werden.

Auf analoge Weise wird gefunden:

$$\text{IVb.}\quad \frac{d^nF(\sqrt{x})}{dx^n} = \frac{F^{(n)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^n} - \frac{n(n-1)}{1}\,\frac{F^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+1}}$$

$$+ \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2}\,\frac{F^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+2}} - \cdots$$

$$+ (-1)^{p}\cdot\frac{(n+p-1)(n+p-2)\ldots(n+1)n(-1)\ldots(n-p)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ \ldots\ \ p}\,\frac{F^{(n-p)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+p}}\ \cdots$$

$$\text{IVc.}\quad \frac{d^nF\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = (-1)^n\left[\frac{1}{x^{2n}}F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n-1)\,n_1}{x^{2n-1}}F^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)\,n_2}{x^{2n-2}}F^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)\,n^{p}}{x^{2n-p}}F^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots\right]$$

Setzt man in der Gleichung IV* $u = x^{\lambda}$, so ergibt sich

$$\frac{d^nF(x^{\lambda})}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{x^{\lambda k}}{k!}F^{(k)}(x^{\lambda})\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^{k+h}\,k_h x^{-\lambda h}\,\frac{d^n(x^{\lambda h})}{dx^n} =$$

$$= \frac{n!}{x^n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{x^{\lambda k}}{k!}F^{(k)}(x^{\lambda})\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^{k+h}k_h(\lambda h)_n.$$

Demnach hat man den Satz

$$\text{IVd.}\quad \frac{d^nF(x^{\lambda})}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\sum_{k=1}^{k=n}A_k x^{\lambda k}F^{(k)}(x^{\lambda}),$$

wo $A_k = \frac{n!}{k!}\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^{k+h}k_h(\lambda h)_n =$

$$= (-1)^{k+1}\frac{n!}{k!}\left[k_1\lambda_n - k_2(2\lambda)_n + k_3(3\lambda)_n - \cdots + (-1)^{k+1}k_k(k\lambda)_n\right.$$

(Man vergleiche die drei vorangehenden mit der hier aufgestellten Formel)

Macht man in der Formel IV* $u = e^x$, so kommt

$$\frac{d^nF(e^x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{e^{kx}}{k!}F^{(k)}(e^x)\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^{k+h}k_h\,e^{-hx}\,\frac{d^n(e^{hx})}{dx^n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n}\frac{e^{kx}}{k!}F^{(k)}(e^x)\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^{k+h}k_h h^n\ .$$

Folglich ist

IVe. $$\frac{d^n F(e^x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} A_k e^{kx} F^{(k)}(e^x),$$

wo $$A_k = \frac{1}{k!} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h h^n =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \left[k_1 1^n - k_2 2^n + k_3 3^n - \ldots + (-1)^{k+1} k_k k^n\right]$$

§. 6. Beispiele.

1) $$y = x^\mu$$

$$\frac{d^n(x^\mu)}{dx^n} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1) \cdot x^{\mu-n}$$

2) $$y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{x^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

3) $$y = \frac{1}{x^\mu}$$

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{x^\mu}\right)}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)}{x^{\mu+n}}$$

4) $$y = \sqrt{x}$$

$$\frac{d^n(\sqrt{x})}{dx^n} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)(2n-1) \cdot \sqrt{x}}{(2n-1)2^n \cdot x^n}$$

(Der Factor $(2n-1)$ ist im Zähler und Nenner hinzugefügt, damit die Formel auch für den ersten Differentialquotienten, für $n = 1$, ihre Anwendung finde.)

5) $$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot x^n \sqrt{x}}$$

6) $$y = \sqrt[3]{x}$$

$$\frac{d^n(\sqrt[3]{x})}{dx^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \ldots (3n-7)(3n-4)(3n-1) \cdot \sqrt[3]{x}}{(3n-1) \cdot 3^n \cdot x^n}$$

(Wegen des Factors $(3n-1)$ siehe die Bemerkung bei Aufgabe 4.)

7) $$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{1.4.7.10\ldots(3n-8)(3n-5)(3n-2)}{3^n x^n \sqrt[3]{x}}$$

8) $$y = \sqrt[3]{x^2}$$

$$\frac{d^n(\sqrt[3]{x^2})}{dx^n} = (-1)^{n-1} 2 \cdot \frac{1.4.7.10\ldots(3n-5)(3n-2)\sqrt[3]{x^2}}{(3n-2).3^n x^n}$$

(Wegen des Factors $(3n-2)$ siehe die Bemerkung bei Aufgabe 4.)

9) $$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{2.5.8.11\ldots(3n-1)}{3^n x^n \sqrt[3]{x^2}}$$

10) $$y = (\alpha + \beta x)^\mu$$

$$\frac{d^n(\alpha+\beta x)^\mu}{dx^n} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)\beta^n(\alpha+\beta x)^{\mu-n}$$

11) $$y = (\alpha+\beta x^2)^\mu$$

Nach dem vorhergehenden Beispiel findet sich mit Hülfe von IVa, §. 5, wenn man noch zur Abkürzung das Binom $\alpha+\beta x^2$ mit u und seine erste Ableitung $2\beta x$ mit u' bezeichnet

$$\frac{d^n(\alpha+\beta x^2)^\mu}{dx^n} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)u^{\mu-n}.u'^n\Big[1 + \frac{n(n-1)}{1.(\mu-n+1)}\left(\frac{\beta u}{u'^2}\right) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.(\mu-n+1)(\mu-n+2)}\left(\frac{\beta u}{u'^2}\right)^2 + \ldots\Big]$$

12) $$y = (a+2bx+cx^2)^\mu$$

Die gesuchte $n$te Ableitung geht aus 11) hervor, wenn man darin α, β, x ersetzt durch $\frac{ac-b^2}{c}$, c, $\frac{b}{c}+x$. Macht man dann noch $a+2bx+cx^2 = u$, $2(b+cx) = u'$, so erhält die Lösung die nämliche Form, wie in Beispiel 11). (Lagrange, Mémoires de Berlin, 1772).

Anmerkung. Die Substitutionen $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, $x = \cos z$; $n = \nu - 1$, $\mu = \nu - \frac{1}{2}$ ergeben unter Anwendung der allgemeinen Formel

$$\nu_1 \operatorname{tang} z - \nu_3 \operatorname{tang}^3 z + \nu_5 \operatorname{tang}^5 z - \ldots = \frac{\sin \nu z}{\cos^\nu z},$$

welche durch Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{\sin \nu z}{\cos^\nu z} = \frac{e^{\nu z i} - e^{-\nu z i}}{2i \cos^\nu z} = \frac{(\cos z + i \sin z)^\nu - (\cos z - i \sin z)^\nu}{2i \cos^\nu z}$$

entsteht, den bemerkenswerthen Specialfall

$$\frac{d^{\nu-1}[(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}]}{dx^{\nu-1}} = (-1)^{\nu-1}.1.3.5\ldots(2\nu-1)\frac{\sin \nu z}{\nu}$$

(**Jacobi**, Crelle's Journal XV, S. 3 und **O. Rodrigues**: Thèse sur l'attraction des sphéroïdes, 1815).

13) $$y = \frac{1}{\alpha + \beta x}$$

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\alpha+\beta x}\right)}{dx^n} = (-\beta)^n \frac{n!}{(\alpha+\beta x)^{n+1}}$$

14) $$y = \frac{1}{\alpha + \beta x^2}$$

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\alpha+\beta x^2}\right)}{dx^n} = (-1)^n n! \frac{u'^n}{u^{n+1}}\left[1-(n-1)_1\left(\frac{\beta u}{u'^2}\right)+(n-2)_2\left(\frac{\beta u}{u'^2}\right)^2-\ldots\right],$$

wo $u = \alpha + \beta x^2$, $u' = 2\beta x$.

(Vergleiche Beispiel 11) für $\mu = -1$).

15) $$y = \frac{1}{a + 2bx + cx^2}$$

Durch das gelegentlich des Beispiels 12) angewandte Verfahren erhält man dieselbe Formel, wie im Beispiel 14).

16) $$y = \frac{x}{a+bx}$$

$$\frac{d^n\left(\frac{x}{a+bx}\right)}{dx^n} = (-b)^{n-1} \frac{a\,n!}{(a+bx)^{n+1}}$$

17) $$y = \frac{(a+bx)^m}{(a'+b'x)^p}$$

Nach dem Leibnitz'schen Satze erhält man, wenn der Kürze wegen gesetzt wird

$$A = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,b^n \frac{(a+bx)^{m-n}}{(a'+b'x)^p}$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = A\left[1 - n_1 \frac{pb'}{b(m-n+1)}\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right) + \right.$$
$$\left. + n_2 \frac{p(p+1)b'^2}{b^2(m-n+1)(m-n+2)}\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^2 - \ldots\right]$$

18) $$y = \frac{1}{a^2 - b^2x^2}$$

Es ist $y = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-bx} + \frac{1}{a+bx}\right)$,

folglich

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{n!\,b^n}{2a}\left[\frac{1}{(a-bx)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(a+bx)^{n+1}}\right]$$

Für ein grades n hat man demnach

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^n} = \frac{n!\,b^n}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}} \sum_{h=0}^{h=\frac{n}{2}} (n+1)_{2h} a^{n-2h} b^{2h} x^{2h}$$

und für ein ungrades n

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^n} = \frac{n!\,b^{n+1}}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}} \sum_{h=0}^{h=\frac{n-1}{2}} (n+1)_{2h+1} a^{n-2h-1} b^{2h} x^{2h+1}$$

Ordnet man nach fallenden Potenzen von x, so wird sowohl für ein grades, als auch für ein ungrades n

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^n} = \frac{n!\,b^n}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}} \sum_{h=0}^{h \leqq \frac{n}{2}} (n+1)_{2h+1} a^{2h} b^{n-2h} x^{n-2h}$$

(Unter dem Zeichen $h \leqq \frac{n}{2}$ ist hier stets die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl zu verstehen.)

19) $$y = \frac{1}{a^2 + b^2x^2}$$

Substituirt man in der Lösung der Aufgabe 18) bi für b, so wird für ein grades n

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!\,b^n}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}} \sum_{h=0}^{h=\frac{n}{2}} (-1)^h (n+1)_{2h} a^{n-2h} b^{2h} x^{2h}$$

und für ein ungrades n

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{n!\,b^{n+1}}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}\sum_{h=0}^{h=\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^h(n+1)_{2h+1}a^{n-2h-1}b^{2h}x^{2h+1}.$$

Eine andere Form der Lösung dieser Aufgabe wird erhalten, wenn man schreibt

$$\frac{1}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-ibx}+\frac{1}{a+ibx}\right).$$

Hieraus folgt

$$\frac{d^ny}{dx^n}=i^n\,\frac{n!\,b^n}{2a}\left[\frac{1}{(a-ibx)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(a+ibx)^{n+1}}\right]$$

Setzt man nun $a=r\cos\varphi$, $bx=r\sin\varphi$, so kommt für ein grades n

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n!\,b^n}{a(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\cos\left[(n+1)\operatorname{arctang}\frac{bx}{a}\right]$$

und für ein ungrades n

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{n!\,b^n}{a(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arctang}\frac{bx}{a}\right]$$

Mittelst der Zerlegung

$$\frac{1}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{bx-ai}-\frac{1}{bx+ai}\right)$$

erhält man durch eine analoge Rechnung eine Formel, die sowohl für ein grades, als auch für ein ungrades n Gültigkeit besitzt.

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^n\frac{n!\,b^n}{a(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arctang}\frac{a}{bx}\right]$$

20) $\qquad y=\frac{1}{x^m-a^m}$

Durch Zerlegung in Partialbrüche findet man,

A. wenn m grade ist

$$\frac{1}{x^m-a^m}=\frac{1}{ma^{m-1}}\cdot\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)+$$

$$+\frac{1}{ma^{m-1}}\cdot\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}m-1}\frac{\cos\frac{2h\pi}{m}+i\sin\frac{2h\pi}{m}}{x-a\cos\frac{2h\pi}{m}-ia\sin\frac{2h\pi}{m}}$$

$$+\frac{1}{ma^{m-1}}\cdot\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}m-1}\frac{\cos\frac{2h\pi}{m}-i\sin\frac{2h\pi}{m}}{x-a\cos\frac{2h\pi}{m}+ia\sin\frac{2h\pi}{m}},$$

also mit Hülfe von 13), wenn man noch setzt:

$$\cos\varphi_h=\frac{x-a\cos\frac{2h\pi}{m}}{\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{2h\pi}{m}+a^2}},$$

$$\sin\varphi_h=\frac{a\sin\frac{2h\pi}{m}}{\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{2h\pi}{m}+a^2}},$$

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{x^m-a^m}\right)}{dx^n}=(-1)^n\cdot\frac{n!}{ma^{m-1}}\cdot\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right)$$

$$+(-1)^n\cdot\frac{n!}{\frac{1}{2}ma^{m-1}}\cdot\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}m-1}\frac{\cos\left(\frac{2h\pi}{m}+(n+1)\varphi_h\right)}{\sqrt{\left(x^2-2ax\cos\frac{2h\pi}{m}+a^2\right)^{n+1}}}.$$

B. wenn m ungrade ist

$$\frac{1}{x^m-a^m}=\frac{1}{ma^{m-1}}\cdot\frac{1}{x-a}+\frac{1}{ma^{m-1}}\cdot\sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}}\frac{\cos\frac{2h\pi}{m}+i\sin\frac{2h\pi}{m}}{x-a\cos\frac{2h\pi}{m}-i\cdot a\sin\frac{2h\pi}{m}}$$

$$+\frac{1}{ma^{m-1}}\cdot\sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}}\frac{\cos\frac{2h\pi}{m}-i\sin\frac{2h\pi}{m}}{x-a\cos\frac{2h\pi}{m}+ia\sin\frac{2h\pi}{m}},$$

also unter ähnlicher Annahme wie vorhin:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{x^m-a^m}\right)}{dx^n}=(-1)^n\cdot\frac{n!}{ma^{m-1}}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n+1}}+$$

$$+(-1)^n \cdot \frac{n!}{\frac{1}{2} m a^{m-1}} \cdot \sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}} \frac{\cos\left(\frac{2h\pi}{m} + (n+1)\varphi_h\right)}{\sqrt{\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2h\pi}{m} + a^2\right)^{n+1}}}.$$

21) $$y = \frac{1}{\sqrt{a+bx}}$$

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)}{dx^n} = (-b)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n(a+bx)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

22) $$y = \frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}$$

Aus Beispiel 11) für $\mu = -\frac{1}{2}$, $\alpha = a$, $\beta = b$ erhält man

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}\right)}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} \frac{u'^n}{u^{\frac{2n+1}{2}}} \left[1 - \frac{2^1.n(n-1)}{1.(2n-1)}\left(\frac{bu}{u'^2}\right) + \frac{2^2.n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{bu}{u'^2}\right)^2 - \ldots\right]$$

23) $$y = \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}$$

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}\right)}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} \frac{u'^n}{u^{\frac{2n+1}{2}}} \left[1 + \frac{2^1.n(n-1)}{1.(2n-1)}\left(\frac{bu}{u'^2}\right) + \frac{2^2.n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{bu}{u'^2}\right)^2 + \ldots\right],$$

wo $u = a - bx^2$, $u' = -2bx$

24) $$y = \sqrt{(a+bx)^\mu}$$

Bezeichnet p die grösste in $\frac{\mu}{2}$ enthaltene ganze Zahl und ist $n \leqq p+1$, so ergibt sich der $n$te Differentialquotient unmittelbar aus 10); ist dagegen $n > p+1$, so wird

$$\frac{d^n\sqrt{(a+bx)^\mu}}{dx^n} =$$

$$\mu(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2p).1.3.5\ldots(2n-2p-3).\left(\frac{b}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{-1}{a+bx}\right)^{n-p-1} \frac{1}{\sqrt{a+bx}}$$

25) $$y = e^x$$
$$\frac{d^n(e^x)}{dx^n} = e^x$$

26) $$y = e^{a+bx}$$
$$\frac{d^n(e^{a+bx})}{dx^n} = b^n e^{a+bx}$$

27) $$y = e^{a^2+b^2x^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = 2b \,.\, e^{a^2+b^2x^2} \,.\, bx$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2b^2 \,.\, e^{a^2+b^2x^2} \,.\, [2b^2x^2+1]$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 4b^3 \,.\, e^{a^2+b^2x^2} \,.\, [2b^3x^3+3bx]$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 4b^4 \,.\, e^{a^2+b^2x^2} \,.\, [4b^4x^4+12b^2x^2+3]$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = 8b^5 \,.\, e^{a^2+b^2x^2} \,.\, [4b^5x^5+20b^3x^3+15bx]$$
. . . .
$$\frac{d^n(e^{a^2+b^2x^2})}{dx^n} = e^{a^2+b^2x^2} \sum_{p=0}^{p \overset{=}{<} \frac{n}{2}} 2^{n-p} . 1.3.5\ldots(2p-1) \,.\, n_{2p}\, b^{2n-2p} x^{n-2p}$$

28) $$y = a^x$$
$$\frac{d^n(a^x)}{dx^n} = a^x(la)^n$$

29) $$y = e^x \,.\, x^m$$
$$\frac{dy}{dx} = e^x \,.\, [x^m+mx^{m-1}]$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x \,.\, [x^m+2mx^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}]$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^x \,.\, [x^m+3mx^{m-1}+3m(m-1)x^{m-2}+m(m-1)(m-2)x^{m-3}]$$
. . . .
$$\frac{d^n(e^x x^m)}{dx^n} = e^x \cdot \sum_{p=0}^{p=n} p\,!\, n_p \,.\, m_p \,.\, x^{m-p}$$

30) $$y = lx$$

Da $\frac{d(lx)}{dx} = \frac{1}{x}$ ist, so wird nach Beispiel 2)
$$\frac{d^n(lx)}{dx^n} = (-1)^{n-1} \,.\, \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

31) $$y = l(a+bx)$$

Mit Hülfe von Aufgabe 13) wird

$$\frac{d^n l(a+bx)}{dx^n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!\, b^n}{(a+bx)^n}$$

32) $$y = l(a^2 - b^2x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2b^2x}{a^2 - b^2x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2b^2(b^2x^2 + a^2)}{(a^2 - b^2x^2)^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{4b^3(b^3x^3 + 3a^2bx)}{(a^2 - b^2x^2)^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{12b^4(b^4x^4 + 6a^2b^2x^2 + a^4)}{(a^2 - b^2x^2)^4}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = -\frac{48b^5(b^5x^5 + 10a^2b^3x^3 + 5a^4bx)}{(a^2 - b^2x^2)^5}$$

. . . .

$$\frac{d^n\left\{l(a^2 - b^2x^2)\right\}}{dx^n} = -\frac{2(n-1)!\, b^n}{(a^2 - b^2x^2)^n} \sum_{p=0}^{p \leqq \frac{1}{2}n} n_{2p}\, a^{2p}\, (bx)^{n-2p}$$

33) $$y = l(a^2 + b^2x^2)$$

$$\frac{d^n\left\{l(a^2 + b^2x^2)\right\}}{dx^n} = \frac{2.(n-1)!\, b^n}{(a^2 + b^2x^2)^n} \sum_{p=0}^{p \leqq \frac{1}{2}n} (-1)^{n-p+1} n_{2p}\, a^{2p} (bx)^{n-2p}$$

34) $$y = l\,\frac{a+bx}{a-bx}$$

Da $\dfrac{d\left\{l\dfrac{a+bx}{a-bx}\right\}}{dx^n} = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2x^2}$ ist, so wird nach Beispiel 18)

$$\frac{d^n\left\{l\dfrac{a+bx}{a-ax}\right\}}{dx^n} = \frac{2(n-1)\, ab^n}{(a^2 - b^2x^2)^n} \cdot \sum_{p=0}^{p \leqq \frac{1}{2}(n-1)} n_{2p+1}\, a^{2p}\, (bx)^{n-2p-1}.$$

35) $$y = (a+bx)^m\, l(a+bx)$$

Der Leibnitz'sche Satz liefert

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\, b^n (a+bx)^{m-n}\Big[l(a+bx) + \frac{n_1}{m-n+1} -$$

$$-\frac{n_2 \,.\, 1}{(m-n+1)(m-n+2)}+\frac{n_3 \,.\, 1\,.\,2}{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}-\ldots\Big]$$

36) $$y = l(b+x+\sqrt{a+2bx+x^2})$$

Da $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{a+2bx+x^2}}$,

so kann der gesuchte $n$te Differentialquotient als Specialfall des Beispiels 12) erhalten werden, indem in 12) $\mu=-\frac{1}{2}$ und $(n-1)$ an Stelle von n gesetzt wird.

$$\frac{d^n[l(b+x+\sqrt{a+2bx+x^2})]}{dx^n}=$$

$$=(-1)^{n-1}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^{n-1}}\cdot\frac{u'^{n-1}}{u^{\frac{2n-1}{2}}}\Big[1-\frac{2^1.(n-1)(n-2)}{1.(2n-3)}\Big(\frac{bu}{u'^2}\Big)+$$

$$+\frac{2^2.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.(2n-3)(2n-5)}\Big(\frac{bu}{u'^2}\Big)^2-\ldots\Big]$$

37) $$y = \sin px$$

$$\frac{dy}{dx}=p\cos px=p\sin\Big(px+\frac{\pi}{2}\Big)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-p^2\sin px=p^2\sin\Big(px+2\frac{\pi}{2}\Big)$$

. . . .

$$\frac{d^n(\sin px)}{dx^n}=p^n\sin\Big(px+n\frac{\pi}{2}\Big)$$

38) $$y=\cos px$$

$$\frac{d^n(\cos px)}{dx^n}=p^n\cos\Big(px+n\frac{\pi}{2}\Big)$$

39) $$y=e^{x\sin\alpha}\sin(x\cos\alpha)$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=e^{x\sin\alpha}\sin\Big(x\cos\alpha-n\alpha+n\frac{\pi}{2}\Big)$$

40) $$y=e^{ax}\sin mx$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{ax}a\Big(\sin mx+\frac{m}{a}\cos mx\Big)$$

Setzt man $\frac{m}{a}=\operatorname{tang}\varphi$, also $a=(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi$, so wird

$$\frac{dy}{dx}=(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}}e^{ax}\sin(mx+\varphi)$$

$$\frac{d^n(e^{ax}\sin mx)}{dx^n}=(a^2+m^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(mx+n\varphi)$$

41) $$y=(a-bx)^m\sin(a+bx)$$

Der Leibnitz'sche Satz liefert

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^m m(m-1)\dots(m-n+1)\,b^n(a-bx)^{m-n}\Big[\sin(a+bx) -$$

$$-n_1 \frac{a-bx}{m-n+1}\sin\left(a+bx+\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+n_2\frac{(a-bx)^2}{(m-n+1)(m-n+2)}\sin\left(a+bx+2\frac{\pi}{2}\right)-\cdots\Big]$$

42) $$y = x^m e^{ax}\sin mx$$

Setzt man $e^{ax}\sin mx = u$, $x^m = v$, so ist zunächst nach Beispiel 40)

$$\frac{d^n u}{dx^n} = (a^2+m^2)^{\frac{n}{2}}\, e^{ax}\sin(mx+n\varphi),$$

und nun ergibt der Leibnitz'sche Satz leicht

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a^2+m^2)^{\frac{n}{2}}\, e^{ax}\Big[x^m\sin(mx+n\varphi)+n_1 m x^{m-1}\frac{\sin[mx+(n-1)\varphi]}{(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}}}+$$

$$+n_2\, m(m-1)x^{m-2}\frac{\sin[mx+(n-2)\varphi]}{(a^2+m^2)^{\frac{2}{2}}}+\dots\Big]$$

43) α) $y = \sin^{2m} px$

β) $y = \sin^{2m+1} px$

γ) $y = \cos^m px$, wo m eine positive ganze Zahl bezeichne.

Mit Hülfe des Euler'schen Satzes

$$\sin x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i},\quad \cos x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$$

erhält man die bekannten Formeln

$$2^{2m}\sin^{2m}x = (-1)^m\sum_{h=0}^{h=2m}(-1)^h(2m)_h\cos(2m-2h)x,$$

$$2^{2m+1}\sin^{2m+1}x = (-1)^m\sum_{h=0}^{h=2m+1}(-1)^h(2m+1)_h\sin(2m+1-2h)x,$$

$$2^m\cos^m x = \sum_{h=0}^{h=m} m_h\cos(m-2h)x$$

Darnach wird

α) $$\frac{(d^n\sin^{2m}px)}{dx^n} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m}}p^n\sum_{h=0}^{h=2m}(-1)^h(2m)_h(2m-2h)^n\cos\left[(2m-2h)px+n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\beta)\quad \frac{d^n(\sin^{2m+1}px)}{dx^n} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}} p^n \sum_{h=0}^{h=2m+1} (-1)^h (2m+1)_h (2m+1-2h)^n \sin\left[(2m+1-2h)px + n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\gamma)\quad \frac{d^n(\cos^m x)}{dx^n} = \frac{p^n}{2^m} \sum_{h=0}^{h=m} m_h (m-2h)^n \cos\left[(m-2h)px + n\frac{\pi}{2}\right]$$

44) $\quad y = \operatorname{arctang}\frac{x}{a}$.

Setzt man $\operatorname{arctang}\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2} - \varphi$, also $x = a \operatorname{cotang}\varphi$,

$$dx = -\frac{a\,d\varphi}{\sin^2\varphi},\quad d\varphi = -\frac{\sin^2\varphi}{a}\,dx,$$

so wird $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2+x^2} = \frac{\sin^2\varphi}{a}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{a}\,\frac{\sin^2\varphi}{a} = -\frac{\sin^2\varphi\sin 2\varphi}{a^2}$$

. . . .

$$d^n\left(\operatorname{arctang}\frac{x}{a}\right) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!\sin^n\varphi\sin n\varphi}{a^n}$$

(Euler: Inst. Calc. diff.)

45) $\quad y = \arcsin x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Setzt man in Beispiel 23) $a = 1$, $b = 1$, wodurch $u = 1-x^2$, $u' = -2x$ wird, und schreibt $(n-1)$ für n, so erhält man

$$d^n(\arcsin x) = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5...(2n-3)}{2^{n-1}}.\frac{u'^{n-1}}{u^{\frac{2n-1}{2}}}\left[1 + \frac{2^1.(n-1)(n-2)}{1.(2n-3)}\left(\frac{u}{u'^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2^2.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2\,(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{u}{u'^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

46) $\quad y = \operatorname{arctang}\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \frac{\sin\alpha}{(1-px)(1-qx)},$$

wo $\cos\alpha + i\sin\alpha = p$, $\cos\alpha - i\sin\alpha = q$.

Hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2i}\left(\frac{p}{1-px} - \frac{q}{1-qx}\right)$$

und daher

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(n-1)!}{2i}\,\frac{p^n(1-qx)^n - q^n(1-px)^n}{(1-2x\cos\alpha + x^2)^n}$$

Wenn man noch setzt

$$1 - x\cos\alpha = \varrho\cos\varphi,\quad x\sin\alpha = \varrho\sin\varphi,$$

so wird

$$p^n(1-qx)^n - q^n(1-px)^n = 2i\varrho^n \sin n(\alpha+\varphi)\ ;$$

folglich

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)!\,\frac{\sin n(\alpha+\varphi)}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

§. 7. **Beispiele zur numerischen Berechnung der successiven Differentialquotienten einiger Functionen für den speciellen Werth $x = 0$ mittelst Reccursion.**

1) $$f(x) = (a+bx^2)^\mu$$
$$f'(x) = 2\mu bx(a+bx^2)^{\mu-1}$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit $(a+bx^2)$ und gibt dem Resultate die Form

$$(a+bx^2)f'(x) = 2\mu bx\, f(x),$$

differentiirt hierauf beiderseits $(n+1)$ mal, so erhält man nach dem Leibnitz'schen Satze

$$(a+bx^2)f^{(n+2)}(x) + 2b(n+1)_1 x f^{(n+1)}(x) + 2b(n+1)_2 f^{(n)}(x) =$$
$$= 2\mu\, bx\, f^{(n+1)}(x) + 2\mu b\ (n+1)_1 f^{(n)}(x)$$

oder $$f^{(n+2)}(x) = b\,\frac{(2\mu-2n-2)\,x f^{(n+1)}(x) + (n+1)(2\mu-n)f^{(n)}(x)}{a+bx^2}.$$

Setzt man in diese Gleichung den speciellen Werth $x = 0$ ein, so kommt

$$f^{(n+2)}(0) = b\,\frac{(n+1)(2\mu-n)}{a}\,f^{(n)}(0).$$

Ist nun n eine grade Zahl, so wird

$$f^{(n)}(0) = 1.3.5\ldots(n-1)\,\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots[\mu-(\tfrac{1}{2}n-1)]a^{\mu-\frac{1}{2}n}(2b)^{\frac{n}{2}}\ ;$$

ist dagegen n eine ungrade Zahl, so folgt, da $f'(0) = 0$,

$$f^{(n)}(0) = 0$$

2) $f(x) = e^{\sin x}$

$f'(x) = e^{\sin x}\cos x = f(x)\cos x$

$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)\cos x - n_1 f^{(n-1)}(x)\sin x - n_2 f^{(n-2)}(x)\cos x +$
$+ n_3 f^{(n-3)}(x)\sin x + \cdots$

$f^{(n+1)}(0) = f^{(n)}(0) - n_2 f^{(n-2)}(0) + n_4 f^{(n-4)}(0) - n_6 f^{(n-6)}(0) + \cdots$

Hieraus ergibt sich

$f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 0$, $f^{IV}(0) = -3$,
$f^{V}(0) = -8$, $f^{VI}(0) = -3$, $f^{VII}(0) = 56$, $f^{VIII}(0) = 217$, $f^{IX}(0) = 64$,
$f^{X}(0) = -2951$, $f^{XI}(0) = -12672 = -2^7.3^2.11$, $f^{XII}(0) = 5973 =$
$= 181.3.11$, etc.

3) $f(x) = \operatorname{arctang} x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$

$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2(n-1)_1 xf^{(n)}(x) + 2(n-1)_2 f^{(n-1)}(x) + 2xf^{(n)}(x) +$
$+ 2(n-1)_1 f^{(n-1)}(x) = 0$

$$f^{(n+1)}(0) + n(n-1)f^{(n-1)}(0) = 0$$

Wenn nun n eine grade Zahl ist, so folgt, weil $f'(0) = 1$

$$f^{(n+1)}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} 1.2.3\ldots n;$$

ist dagegen n eine ungrade Zahl, so wird wegen $f''(0) = 0$

$$f^{(n+1)}(0) = 0$$

4) $f(x) = \arcsin x$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1-x^2}\, f'(x) = 1$

$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f'(x) + \sqrt{1-x^2}\, f''(x) = 0$

$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$

$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - 2(n-1)_1 xf^{(n)}(x) - 2(n-1)_2 f^{(n-1)}(x) - xf^{(n)}(x) -$
$-(n-1)_1 f^{(n-1)}(x) = 0$

$$f^{(n+1)}(0) - (n-1)^2 f^{(n-1)}(0) = 0$$

Für ein grades n wird, da $f'(0) = 1$

$$f^{(n+1)}(0) = 1.3^2.5^2\ldots(n-1)^2$$

und für ein ungrades n

$$f^{(n+1)}(0) = 0$$

5) $f(x) = (\arcsin x)^2$

Analog wie in 4) erhält man die Gleichung

$$f^{(n+1)}(0) - (n-1)^2 f^{(n-1)}(0) = 0$$

und hieraus für ein grades n

$$f^{(n+1)}(0) = 0$$

und für ein ungrades n

$$f^{(n+1)}(0) = 2.\,2^2.4^2.6^2\ldots(n-1)^2$$

6) $f(x) = x \operatorname{cotang} x$

Schreibt man

$$x\cos x = f(x)\sin x,$$

so folgt nach dem Leibnitz'schen Satze durch n malige Differentiation

$$x\frac{d^n(\cos x)}{dx^n} + n\frac{d^{n-1}(\cos x)}{dx^{n-1}} = f(x)\frac{d^n(\sin x)}{dx^n} + n_1 f'(x)\frac{d^{n-1}(\sin x)}{dx^{n-1}} +$$
$$+ n_2 f''(x)\frac{d^{n-2}(\sin x)}{dx^{n-2}} + \cdots f^{(n)}(x)\sin x$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so verschwindet das Glied, welches $f^{(n)}(x)$ enthält, und es wird $f^{(n-1)}(x)$ als Function aller vorhergehenden Ableitungen erhalten. Da $f(x)$ eine grade Function von x ist, so erkennt man leicht, dass alle Ableitungen ungrader Ordnung verschwinden. Es ist hiernach

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -\tfrac{2}{3},\ f'''(0) = 0, \text{ etc.}$$

7) $f(x) = \sin(m \arcsin x)$

$$f'(x) = \frac{m\cos(m\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{m\,x\cos(m\arcsin x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{m^2\sin(m\arcsin x)}{1-x^2}$$

Hieraus folgt

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + m^2 f(x) = 0.$$

Differentiirt man Glied für Glied p mal, so erhält man

$$(1-x^2)f^{(p+2)}(x) - 2p_1 x f^{(p+1)}(x) - 2p_2 f^{(p)}(x) - xf^{(p+1)}(x) -$$
$$- p_1 f^{(p)}(x) + m^2 f^{(p)}(x) = 0$$

und für $x = 0$

$$f^{(p+2)}(0) = (p^2 - m^2)f^{(p)}(0).$$

Alle Ableitungen grader Ordnung sind gleich Null und

$$f^{(2n+1)}(0) = m(1^2-m^2)(3^2-m^2)(5^2-m^2)\ldots[(2n-1)^2-m^2].$$

8) $f(x) = \cos(m \arcsin x)$

$$f^{(2n+1)}(0)=0,\ f^{(2n+2)}(0) = -m^2(2^2-m^2)(4^2-m^2)(6^2-m^2)\ldots[(2n)^2-m^2]$$

Anmerkung. In den vorstehenden Formeln bezeichnet $\arcsin x$ denjenigen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen des Kreises mit dem Radius 1, dessen sinus gleich x ist. Da der cosinus dieses Bogens immer positiv ist, so ist in Beispiel 8) $f(0)=1$ und $f'(0)=0$.

9) $f(x) = \cos(m \arccos x)$

Wenn m eine ungrade Zahl bezeichnet, so wird

$$f^{(2n+1)}(0) = m(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ldots[(2n-1)^2-m^2]\sin\frac{m\pi}{2}$$

$$f^{(2n)}(0) = 0;$$

für ein grades n dagegen kommt

$$f^{(2n+2)}(0) = -m^2(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ldots[(2n)^2-m^2]\cos\frac{m\pi}{2}$$

$$f^{(2n+1)}(0) = 0$$

Anmerkung. In diesem Beispiele bedeutet $\arccos x$ denjenigen zwischen 0 und π liegenden Bogen des Kreises mit dem Radius 1, dessen cosinus gleich x ist.

10) $f(x) = (1+x^2)^{\frac{m}{2}}\sin(m \operatorname{arctang} x)$

Indem man aus den drei für $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ erhaltenen Gleichungen $\sin(m \operatorname{arctang} x)$ und $\cos(m \operatorname{arctang} x)$ eliminirt, erhält man

$$(1+x^2)f''(x) - 2(m-1)xf'(x) + (m^2-m)f(x) = 0$$

und hieraus durch $p$malige Differentiation nach dem Leibnitz'schen Satze

$$(1+x^2)f^{(p+2)}(x) + 2p_1 x f^{(p+1)}(x) + 2p_2 f^{(p)}(x) - 2(m-1)x f^{(p+1)}(x) -$$
$$-2(m-1)p_1 f^{(p)}(x) + (m^2-m)f^{(p)}(x) = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung $x=0$, so folgt

$$f^{(p+2)}(0) = -f^{(p)}(0)(m-p)(m-p-1).$$

Demnach wird, indem man $\operatorname{arctang} 0 = 0$ voraussetzt

$$f^{(2n+2)}(0)=0, f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n m(m-1)(m-2)\ldots(m-2n+1)(m-2n).$$

11) $f(x) = \dfrac{\cos(m \operatorname{arctang} x)}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}}$

$$f^{(2n+1)}(0) = 0,\ f^{(2n)}(0) = (-1)^n m(m+1)\ldots(m+2n-1).$$

Capitel III.

Differentiale von entwickelten Functionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen.

§. 8. Allgemeine Sätze.

Bedeutet $f(x, y)$ eine beliebige Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y und werden deren partielle Ableitungen nach Jacobi mittelst des charakteristischen ∂ mit $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, etc. bezeichnet, während zur Bezeichnung der Differentiale das Zeichen d verwendet wird, so gelten für die Differentiation dieser Function folgende Sätze:

I. $df(x,y) = d_x f(x,y) + d_y f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

II. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

III. $d^n f(x,y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + n_1 \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + n_2 \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \cdots$

$$+ n \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}} dx dy^{n-1} + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f.$$

Hierbei ist die letzte Bezeichnungsweise in dem Sinne zu verstehen, dass nach ausgeführter Entwicklung der $n$ten Potenz statt $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k$ die partielle Ableitung $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}$ zu setzen ist.

IV. Bezeichnet $F(u, v)$ eine mittelbare Function von x, indem $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ Functionen der einzigen unabhängigen Veränderlichen x bedeuten, so ist

$$dF(u, v) = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv,$$

$$d^2 F(u, v) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial F}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial F}{\partial v} d^2 v,$$

etc.

wo $du = \varphi'(x)\,dx$, $dv = \psi'(x)\,dx$,

$d^2u = \varphi''(x)\,dx^2$, $d^2v = \psi''(x)\,dx^2$,

etc.

Diese Formeln für $dF(u,v)$, $d^2F(u,v)$, etc. bleiben auch dann noch bestehen, wenn $u = f(x,y)$ und $v = g(x,y)$ Functionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y bezeichnen; nur ist in diesem Falle

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy,$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2,$$

etc.

$$dv = \frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy,$$

$$d^2v = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\,d^2x + 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\,dy^2,$$

etc.

Anmerkung. Die symbolische Gleichung $d^nF(u,v) = \left(\frac{\partial}{\partial u}\,du + \frac{\partial}{\partial v}\,dv\right)^n F$, welche zunächst nur Gültigkeit besitzt, wenn u und v unabhängige Veränderliche sind, behält ihre Bedeutung auch dann, wenn u und v nicht mehr die unabhängigen Variablen selbst, sondern ganze lineare Functionen derselben sind.

§. 9. Beispiele.

1) $u = 27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3 + 81$

$du = 3\,(3x+y)^2\,(3dx + dy)$

2) $u = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$

$du = -\dfrac{4(xdx + ydy)}{(x^2+y^2)^3}$

3) $u = \dfrac{(x+a)^n}{(y+b)^m}$

$du = \dfrac{(x+a)^{n-1}[n\,(y+b)\,dx - m\,(x+a)\,dy]}{(y+b)^{m+1}}$

4) $u = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

$du = \frac{-\sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy}{2\sqrt{xy}\,(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$

5) $u = ylx = lx^y$

$du = \frac{y}{x}\,dx + lx\,dy$

$d^2u = -\frac{y}{x^2}\,dx^2 + \frac{2}{x}\,dx\,dy$

$d^3u = \frac{2y}{x^3}\,dx^3 - \frac{3}{x^2}\,dx^2\,dy$

6) $u = l\frac{x+y}{x-y}$

$du = -\frac{2y}{x^2-y^2}\,dx + \frac{2x}{x^2-y^2}\,dy$

$d^2u = \frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}\,dx^2 - 4\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}\,dx\,dy + \frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}\,dy^2$

$d^3u = -\frac{4y(3x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^3}\,dx^3 + \frac{12x(x^2+3y^2)}{(x^2-y^2)^3}\,dx^2\,dy -$

$-\frac{12y(3x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^3}\,dx\,dy^2 + \frac{4x(x^2+3y^2)}{(x^2-y^2)^3}\,dy^3$

7) $u = l\sqrt{\frac{ax+by}{ax-by}}$

$du = \frac{ab\,(x\,dy - y\,dx)}{a^2x^2 - b^2y^2}$

8) $u = xye^{x+2y}$

$du = e^{x+2y}[y(1+x)\,dx + x(1+2y)\,dy]$

9) $u = y^x$

$du = y^x ly\,dx + xy^{x-1}dy$

$d^2u = y^x(ly)^2dx^2 + 2y^{x-1}(1+xly)\,dx\,dy + x(x-1)y^{x-2}dy^2$

10) $u = \frac{ye^x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$du = \frac{(x^2+y^2-x)\,ye^x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx + \frac{x^2e^x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy$

11) $u = \sin x \cos y$

$du = \cos x . \cos y\,dx - \sin x \sin y\,dy$

$d^2u = -\sin x \cos y\,dx^2 - 2\cos x \sin y\,dx\,dy - \sin x \cos y\,dy^2$

$d^3u = -\cos x \cos y dx^3 + 3\sin x \sin y dx^2 dy - 3\cos x \cos y dx dy^2 + \sin x \sin y dy$

12) $u = \operatorname{arctang} \frac{x}{y}$

$$du = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$$d^2u = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx^2 + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy^2$$

$$d^3u = \frac{-2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}\,dx^3 - \frac{6x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}\,dx^2dy +$$

$$+ \frac{6y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}\,dxdy^2 + \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}\,dy^3$$

13) $u = \operatorname{arctang} \frac{x-y}{x+y}$

$$du = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$$

14) $u = \operatorname{arctang} \frac{2x+y-x^2y}{1-2xy-x^2}$

$$du = \frac{2dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}$$

15) $u = \arccos \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}$$

16) $u = \operatorname{arctang} \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

Man bestimme $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ und $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{15xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{7}{2}}}$$

17) $u = l \sin \frac{x}{y}$

$$du = \frac{1}{y^2}(ydx - xdy)\operatorname{cotang}\frac{x}{y}$$

18) $u = l \operatorname{tang} \frac{x}{y}$

$$du = \frac{2(ydx - xdy)}{y^2 \sin\frac{2x}{y}}$$

19) $u = \arcsin \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

$$du = \frac{\sqrt{2}\, xy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}\, dx - \frac{\sqrt{2}\, x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}\, dy$$

20) $u = axyz + bxy + cxz + eyz + g\frac{x}{y} + h\frac{x}{z} + k\frac{y}{z} + mx + ny + pz$

$$du = \left(ayz + by + cz + \frac{g}{y} + \frac{h}{z} + m\right) dx +$$
$$+ \left(axz + bx + ez - g\frac{x}{y^2} + \frac{k}{z} + n\right) dy +$$
$$+ \left(axy + cx + ey - h\frac{x}{z^2} - k\frac{y}{z^2} + p\right) dz$$

21) $u = \frac{x^2 y}{a^2 - z^2}$

$$du = \frac{2xy}{a^2 - z^2}\, dx + \frac{x^2}{a^2 - z^2}\, dy + \frac{2x^2 yz}{(a^2 - z^2)^2}\, dz$$

22) $u = \frac{x^2 y + y^2 z + z^2 x}{x + y + z}$

$$du = \frac{(y+z)(z^2+2xy) + y(x^2 - yz)}{(x+y+z)^2}\, dx +$$
$$+ \frac{(z+x)(x^2+2yz) + z(y^2 - xz)}{(x+y+z)^2}\, dy + \frac{(x+y)(y^2+2xz) + x(z^2 - xy)}{(x+y+z)^2}\, dz$$

23) $u = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + yz$

$$du = -\frac{1}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}\, dx + z dy + y dz$$

$$d^2u = \frac{3}{4(x-1)^{\frac{5}{2}}}\, dx^2 + 2 dy\, dz$$

$$d^3u = -\frac{15}{8(x-1)^{\frac{7}{2}}}\, dx^3$$

24) $u = l\, \frac{y + \sqrt{x^2 - z^2}}{y - \sqrt{x^2 - z^2}}$

$$du = \frac{xy\, dx + (z^2 - x^2)\, dy - yz\, dz}{(y^2 - x^2 + z^2)\sqrt{x^2 - z^2}}$$

25) $u = z^{y^x}$

$$du = z^{y^x} . y^x . \left[ly . lz . dx + \frac{x}{y} \cdot lz . dy + \frac{1}{z} \cdot dz \right]$$

26) $u = \dfrac{m \sin y - n \sin z}{p \sin z - m \sin x}$

$du =$

$$= \frac{m\cos x(m\sin y - n\sin z)dx + m\cos y(p\sin z - m\sin x)dy + m\cos z(n\sin x - p\sin y)dz}{(p\sin z - m\sin x)^2}$$

27) $u = \arccos \dfrac{z}{xy}$

$$du = \frac{yzdx + zxdy - xy\,dz}{xy\sqrt{x^2y^2 - z^2}}$$

28) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \operatorname{arctang} \dfrac{x}{z} + \dfrac{z^2}{2}$

$$du = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{zdx - xdz}{z^2 + x^2} + zdz$$

29) $u = xyz$

Zu berechnen d^3u und $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$.

$$d^3u = 6dx\,dy\,dz, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = 1$$

30) $u = x^3 + y^3 + z^3$

Zu berechnen d^3u.

$$d^3u = 6(dx^3 + dy^3 + dz^3)$$

31) $u = e^{xyz}$

Man berechne $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)\,e^{xyz}$$

32) $u = \dfrac{xy\,zt}{x + y + z + t}$

$du =$

$$= \frac{(y + z + t)yztdx + (z + t + x)ztxdy + (t + x + y)txydz + (x + y + z)\,xyzdt}{(x + y + z + t)^2}$$

Capitel IV.

Differentiale von unentwickelten Functionen zweier und mehrerer Veränderlichen.

§. 10. Allgemeine Sätze.

Wenn die abhängige Veränderliche y mit der unabhängigen Veränderlichen x durch eine Gleichung von der Form $F(x, y) = 0$ verbunden erscheint, so heisst y eine unentwickelte oder implicite Function von x, wenn man sich die Gleichung nicht nach y aufgelöst denkt.

Bei der Differentiation unentwickelter Functionen sind sowohl die Fälle einer und mehrerer unabhängigen Veränderlichen, als auch die Fälle einer und mehrerer abhängigen Veränderlichen zu unterscheiden.

1) Ist im einfachsten Falle eine Gleichung mit zwei Veränderlichen gegeben $F(x; y) = 0$, so kann das Differential der abhängigen Veränderlichen y dadurch gefunden werden, dass man das vollständige Differential dF, genommen in Bezug auf die beiden Veränderlichen x und y, gleich Null setzt und aus der entstandenen Gleichung dy bestimmt.

Ist also gegeben $\quad F(x; y) = 0,$

so ergibt die angedeutete Regel

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = 0,$$

und hieraus folgt

$$dy = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\,dx.$$

Die nochmalige Differentiation dieses Ausdrucks oder der vorhergehenden Gleichung nach x, wobei y als Function von x zu betrachten und der gefundene Werth von $\frac{dy}{dx}$ einzusetzen ist, ergibt

$$d^2y = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3} dx^2$$

2) Liegen m Gleichungen

$$F_1(x;\, y_1,\, y_2, \ldots y_m) = 0$$
$$F_2(x;\, y_1,\, y_2, \ldots y_m) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_m(x;\, y_1,\, y_2, \ldots y_m) = 0$$

zwischen den m abhängigen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots y_m$ und der einzigen unabhängigen Veränderlichen x vor, so werden die Differentiale der m Functionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ auf folgende Weise bestimmt: Man setze die vollständigen Differentiale der Functionen $F_1, F_2, \ldots F_m$ in Bezug auf sämmtliche Veränderliche gleich Null, wodurch man ein System von m Gleichungen erhält:

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} dy_m = 0$$
$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_m} dy_m = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$dF_m = \frac{\partial F_m}{\partial x} dx + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} dy_m = 0 .$$

Da nun diese m Gleichungen in Beziehung auf die Differentiale dy_1, $dy_2, \ldots dy_m$ linear sind, so können aus denselben die gesuchten Differentiale berechnet werden. Die Auflösung dieses Systems von m linearen Gleichungen wird bekanntlich durch Anwendung der Determinanten wesentlich erleichtert. Vorausgesetzt wird hierbei, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwinde.

Für den Fall von zwei Gleichungen mit drei Veränderlichen

$$F_1(x;\, y_1,\, y_2) = 0$$
$$F_2(x;\, y_1,\, y_2) = 0$$

führt folgende Rechnung zum Ziel: Die Differentiation dieser Gleichungen ergibt

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} dy_2 = 0$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} dy_2 = 0,$$

und hieraus folgt

$$dy_1 = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}} \cdot dx, \quad dy_2 = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}} \cdot dx.$$

Anmerkung. Die Rechnungsvorschrift für Determinanten mit 4 Elementen liegt ausgesprochen in der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

Zur Auswerthung einer Determinante mit 9 Elementen (aber nur für diese) gilt folgende mechanische Regel: Man denke sich neben der dritten Columne die erste und zweite wiederholt und führe dann die Multiplication nach Anleitung des folgenden Schema aus.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{matrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - \\ - c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - c_3 b_1 a_2$$

3) Ist eine Gleichung $F(x, y; z) = 0$ zwischen den drei Veränderlichen x, y, z gegeben und wird z als Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y angesehen, so werden die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ dadurch erhalten, dass man das vollständige Differential von F, genommen in Bezug auf x, y, z, gleich Null setzt und die so entstandene Gleichung in Bezug auf dz auflöst. Die Coefficienten

von dx und dy sind die gesuchten Werthe von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$. Darnach hätte man z. B., wenn gegeben ist

$$F(x, y; z) = 0,$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0,$$

$$dz = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} dx - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

4) Sind endlich m Gleichungen mit $(m+n)$ Veränderlichen gegeben, so können im Allgemeinen in Folge dieser Gleichungen m dieser Grössen als Functionen der übrigen Variablen betrachtet werden, und es ergeben sich die Differentiale dieser m impliciten Functionen durch die Verbindung der für die Fälle 2) und 3) gegebenen Vorschriften.

§. 11. Beispiele zur Differentiation unentwickelter Functionen einer unabhängigen Veränderlichen.

1) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Delta}{(Bx + Cy + E)^3}, \text{ wenn } \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

2) $y^5 - 5axy + x^5 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^4}{y^4 - ax}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a(y^4 - ax)(ay - x^4) - 4y^3(ay - x^4)^2 - 4x^3(y^4 - ax)^2}{(y^4 - ax)^2}$$

3) $(x^2 + y^2 - bx)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$

(Schnecke (Limaçon) von Pascal.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{a^2x - (x^2 + y^2 - bx)(2x - b)}{2(x^2 + y^2 - bx) - a^2}$$

4) $y^n - \frac{x+y}{x-y} = 0$

Multiplicirt man nach der Differentiation Dividend und Divisor mit y und ersetzt $\frac{x+y}{x-y}$ durch y^n, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y^2}{n(x^2-y^2)-2xy}$$

5) $x^n - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n(x^4-y^4)+4x^2y^2}{4x^3y}$$

6) $(x+y)^{\frac{3}{2}} + (x-y)^{\frac{3}{2}} = a$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2x^3+(2x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}{y^3\sqrt{x^2-y^2}}.$$

7) $ax + by + xy = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a+y)(ax+by+xy)-x}{y-(b+x)(ax+by+xy)}$$

8) $e^y = x^{y+x}$

oder $y = (x+y)\,lx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1+lx)+y}{x(1-lx)}$$

9) $e^{x+y} = x^y$

oder $x+y = ylx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x(1-lx)}$$

10) $xy = l(e^{xy}+e^{-xy})$

oder $e^{-xy} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Zu demselben Resultate führt auch $c + xy = l(e^{\;y} + e^{-xy})$

11) $y^x = x^y$

oder $ylx = xly$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\cdot\frac{y-xly}{x-ylx} = \frac{y^2(lx-1)}{x^2(ly-1)}$$

12) $y = 1 + xe^y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{2-y}$$

13) $ye^{ny} = ax^m$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my}{x(1+ny)}$$

14) $x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{2\sin 2y - \sin y - x\cos y} = \frac{\sin^2 y}{\sin y \sin 2y + \cos y - 1}$$

15) $y\sin x - \cos(x-y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x} = \frac{1 - 2y\sin y + y^2}{1 - \cos y - y\sin y}$$

16) $\sin(xy) = mx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m - y\cos(xy)}{x\cos(xy)}$$

17) $ylx = x\sin y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\sin y - y}{x(lx - x\cos y)} = \frac{y}{x^2} \cdot \frac{y - x\sin y}{y\cos y - \sin y}$$

18) $\frac{m^2\sin^2 x}{a^2 - m^2} = \frac{n^2\sin^2(x+y)}{a^2 - n^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m^2(a^2-n^2)}{n^2(a^2-m^2)} \cdot \frac{\sin x\cos x}{\sin(x+y)\cos(x+y)} - 1 = \frac{m}{n}\sqrt{\frac{a^2-n^2}{a^2-m^2}} \cdot \frac{\cos x}{\cos(x+y)} - 1$$

19) $4y^3 - 3y + \sin x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\,\frac{\cos x}{(1-4y^2)} = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}$$

20) $y\sin nx = ae^{nx+y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ny}{1-y}(1 - \operatorname{cotang} nx)$$

21) $\operatorname{tang}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$l\operatorname{tang}\frac{y}{2} = \frac{1}{2}l(1-x) - \frac{1}{2}l(1+x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin y}{1-x^2} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

22) $y\sin x = x\operatorname{arctang} y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(1+y^2)\frac{x\cos x - \sin x}{x - (1+y^2)\sin x}$$

23) $xy = \operatorname{arctang}\frac{x}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{1 - (x^2+y^2)}{1 + (x^2+y^2)}$$

24) $$\frac{y}{x} = \operatorname{arctang} \frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Anmerkung. Da diese Gleichung zwischen x und y nur das Verhältniss $\frac{y}{x} = z$ enthält, so ist dieses Verhältniss eine Constante, welche aus der Gleichung $z \operatorname{tang} z = 1$ zu bestimmen ist.

25) $$\operatorname{arctang} \frac{x-a}{x+a} - \operatorname{arctang} \frac{y-a}{y+a} = \operatorname{arctang} \frac{b-a}{b+a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+a^2}{x^2+a^2}$$

26) $$\arcsin \frac{x}{m} + \arcsin \frac{y}{n} = e^{-\operatorname{tang} \frac{m}{n}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n^2-y^2}{m^2-x^2}}$$

27) $$y^3 - 3y \arcsin x + x^3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2\sqrt{1-x^2}}{(y^2 - \arcsin x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{3y(y-x^2\sqrt{1-x^2})}{(2y^3-x^3)\sqrt{1-x^2}}$$

28) $$yx^y = \arcsin x + \arccos \frac{m-1}{n}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x - y\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{\arcsin x(1+ylx)}$$

29) $$\arcsin \left(\frac{y^3+x^3-3x^2y}{y^3+x^3-3xy^2}\right)^{\frac{1}{3}} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Man erkennt leicht, dass der gegebene Ausdruck nur von dem Verhältniss $\frac{y}{x} = z$ der beiden Veränderlichen x und y abhängt. Der constante Werth dieses Verhältnisses bestimmt sich aus der Gleichung

$$\frac{z^3-3z+1}{z^3-3z^2+1} = \sin^3 a.$$

30) $$a^{x^y} + \sqrt{\sec(xy)} = l \operatorname{cotang} a$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2a^{x^y}.y.x^{y-1}.la + y \operatorname{tang}(xy)\sqrt{\sec(xy)}}{2a^{x^y}.x^y.lx.la + x \operatorname{tang}(xy)\sqrt{\sec(xy)}}$$

31) $x^3+y^2-3z+a=0$
$z^2-2y^2-x+b=0$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(1-2x^2z)}{4y(z-3)},\ \frac{dz}{dx}=\frac{1-6x^2}{2(z-3)}$$

32) $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$
$x+y+z=a$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{z-x}{y-z},\ \frac{dz}{dx}=\frac{x-y}{y-z}.$$

33) $\operatorname{tang}(x+y)+\sin z=\cos a$
$\operatorname{tang}(x-y)+\sin z=\operatorname{tang} a$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2(x+y)-\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)},\ \frac{dz}{dx}=-\frac{2}{\cos z[\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)]}.$$

34) $x+y+z+u=a$
$x^2+y^2+z^2+u^2=b$
$x^3+y^3+z^3+u^3=c$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(u-x)(z-x)}{(u-y)(z-y)},\ \frac{dz}{dx}=-\frac{(u-x)(y-x)}{(u-z)(y-z)},\ \frac{du}{dx}=-\frac{(z-x)(y-x)}{(z-u)(y-u)}.$$

35) $u^2+x^2+y^2+z^2=a^2$
$l(xy)+\frac{y}{z}=b^2$
$l\frac{z}{x}+xz=0$
$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\left[\frac{y^2}{x}\cdot\frac{x-y}{x+y}+\frac{z^2}{x}\cdot\frac{xz-1}{xz+1}-x\right].$$

§. 12. Beispiele zur Differentiation unentwickelter Functionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen.

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (Dreiaxiges Ellipsoid.)
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^2}{a^4}\frac{a^2z^2+c^2x^2}{z^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{xy}{z^3},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^2}{b^4}\frac{b^2z^2+c^2y^2}{z^3}.$$

2) $\frac{(x-mz)^2}{a^2}+\frac{(y-nz)^2}{b^2} = 1$ (Elliptischer Cylinder.)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{b^2(x-mz)}{a^2n(y-nz)+b^2m(x-mz)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{a^2(y-nz)}{a^2n(y-nz)+b^2m(x-mz)}.$$

3) $\frac{y^2}{a}-\frac{z^2}{b} = 2x$ (Hyperbolisches Paraboloid.)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{b}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{by}{az},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{b^2}{z^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{b^2y}{az^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{b}{a^2}\,\frac{az^2-by^2}{z^3}.$$

4) $\frac{x}{y} = \operatorname{tang} az$ (Schraubenfläche.)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\cos^2 az}{ay},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x\cos^2 az}{ay^2}.$$

5) $xy+xz=y^2+z^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+z}{2z-x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-2y}{2z-x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{(y+z)(z-x-y)}{(2z-x)^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=4\frac{y^2+z^2-xz}{(2z-x)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\frac{(2z-x)^2+(x-2y)^2}{(2z-x)^3}.$$

6) $(x^2+y^2+z^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2+z^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}\frac{A}{B},$$

wenn $A=x^2+y^2+z^2+a^2$ und $B=x^2+y^2+z^2-a^2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^2+z^2}{z^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{xy}{z^3}\frac{A}{B},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{8a^4y^2z^2+AB(z^2B+y^2A)}{z^3B^3}.$$

7) $x^3+y^3+z^3=xy+xz+yz$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2-y-z}{x+y-3z^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3y^2-x-z}{x+y-3z^2}.$$

8) $xy+xz+yz = xyz$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+z-yz}{xy-x-y},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+z-xz}{xy-x-y}.$$

9) $xly-ylx = xyz$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xly-y-xyz}{x^2y},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-ylx-xyz}{xy^2}.$$

10) $e^{ax+by+cz} = a_1x + b_1y + c_1z$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a(a_1x + b_1y + c_1z) - a_1}{c_1 - c(a_1x + b_1y + c_1z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b(a_1x + b_1y + c_1z) - b_1}{c_1 - c(a_1x + b_1y + c_1z)}.$$

11) $z^3 = ye^{x+z}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^{x+z}}{3z^2 - ye^{x+z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{x+z}}{3z^2 - ye^{x+z}}.$$

12) $x^x . y^y . z^z = a$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{lx+1}{lz+1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{ly+1}{lz+1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z(lz+1)^2 + x(lx+1)^2}{xz(lz+1)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(lx+1)(ly+1)}{z(lz+1)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{z(lz+1)^2 + y(ly+1)^2}{yz(lz+1)^3}.$$

13) $x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = (x^2+y^2)zu + (z^2+u^2)xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y(z^2+u^2) + 2xzu - 4x^3}{z(x^2+y^2) + 2xyu - 4u^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x(z^2+u^2) + 2yzu - 4y^3}{z(x^2+y^2) + 2xyu - 4u^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{u(x^2+y^2) + 2xyz - 4z^3}{z(x^2+y^2) + 2xyu - 4u^3}.$$

14) $\text{arccotang}\,\frac{u+z-1}{u-z+1} = \text{arccotang}\,\frac{y-x+1}{y+x-1}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z-1} \cdot \frac{u^2+(z-1)^2}{y^2+(x-1)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x-1}{z-1} \cdot \frac{u^2+(z-1)^2}{y^2+(x-1)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u}{z-1}.$$

15) $x + y + z + u = a$

$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = b$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u^2 - x^2}{u^2 - z^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{u^2 - y^2}{u^2 - z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z^2 - x^2}{u^2 - z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z^2 - y^2}{u^2 - z^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{u(x^2-z^2)^2 + x(u^2-z^2)^2 + z(u^2-x^2)^2}{(u^2-z^2)^3} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{u(z^2-x^2)(z^2-y^2) + z(u^2-x^2)(u^2-y^2)}{(u^2-z^2)^3} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\frac{y(u^2-z^2)^2 + z(y^2-u^2)^2 + u(z^2-y^2)^2}{(u^2-z^2)^3} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

16) $xy + 6zu = 10$

$x + y - 8z - 12u = 5$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y+z}{4(2z-3u)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x+z}{4(2z-3u)},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{4y+3u}{12(2z-3u)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{4x+3u}{12(2z-3u)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{(2y+z)(4y+3u)}{8(2z-3u)^3}=-\tfrac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{(3u+4x)(2y+z)+(2x+z)(4y+3u)-8(2z-3u)^2}{16(2z-3u)^3}=-\tfrac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{(4x+3u)(2x+z)}{8(2z-3u)^3}=-\tfrac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

17) $x+y+z+u = a$

$xyzu = b$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z}{x}\cdot\frac{u-x}{u-z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z}{y}\cdot\frac{u-y}{u-z},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{u}{x}\cdot\frac{z-x}{z-u},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{u}{y}\cdot\frac{z-y}{z-u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{zu}{x^2(u-z)^3}\left[(u-z)^2+(u-x)^2+(z-x)^2\right]=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{zu}{xy(u-z)^3}\left[(u-x)(u-y)+(z-x)(z-y)\right]=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{zu}{y^2(u-z)^3}\left[(u-z)^2+(u-y)^2+(z-y)^2\right]=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

18) $x+y+z = uv$

$x+y+u = vz$

$x+y+v = zu$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(1+u+v-z)(1+z)}{u^2+v^2+z^2+2uvz-1}=\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(1+v+z-u)(1+u)}{u^2+v^2+z^2+2uvz-1}=\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{(1+u+z-v)(1+v)}{u^2+v^2+z^2+2uvz-1}=\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

§. 13. Allgemeine Sätze.

1) Soll in einem Ausdrucke von der Form

$$F\left(x; y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\right), \qquad 1)$$

wo F eine gegebene Function bedeutet, statt der Grösse x eine andere veränderliche Grösse t als unabhängige Veränderliche betrachtet werden, welche mit x durch die Gleichung

$$\varphi(x, t) = 0$$

verbunden sein möge, so kann zur Berechnung der Ableitungen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}, \cdots$ folgendes Verfahren eingeschlagen werden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

indem y als Function von t, d. h. als mittelbare Function von x betrachtet wird und hierauf die früheren Sätze (§. 1.) angewendet werden.

Die weitere Differentiation der erhaltenen Gleichung nach x ergibt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d^3y}{dt^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 3\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}$$

etc.,

wo auf den rechten Seiten für $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}, \cdots$ die aus der Gleichung $\varphi(x, t) = 0$ (nach §. 10) sich ergebenden Werthe einzusetzen sind.

In dem sich häufig darbietenden Falle, wo y als unabhängige Variable betrachtet werden soll, können die nöthigen Formeln aus den vorigen durch die Specialisirung $t = y$ oder auch direkt auf analoge Weise erhalten werden.

2) Wenn es darauf ankommt, den Ausdruck F durch Einführung zweier neuen veränderlichen Grössen t und u umzugestalten, welche mit den vorigen durch die Gleichungen

$$\varphi_1(x, y, t, u) = 0,$$
$$\varphi_2(x, y, t, u) = 0$$

zusammenhängen, so dass t als unabhängige Variable und u als abhängige veränderliche Grösse betrachtet wird, so hat man nur in den obigen Formeln an die Stelle von $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$, etc. ihre aus den Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ (nach §. 10) folgenden Werthe zu setzen.

3) Um in einem Ausdrucke von der Form

$$F\left(x, y; z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\right) \quad 2)$$

statt der unabhängigen Veränderlichen x und y zwei neue veränderliche Grössen u und v mittelst der Gleichungen

$$\varphi_1(x, y, u, v) = 0,$$
$$\varphi_2(x, y, u, v) = 0$$

als unabhängige Variable einzuführen, kann man von den Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\text{etc.}$$

ausgehen, in welche man für $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$, etc. die aus den Gleichungen $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$ (nach §. 10) folgenden Werthe einzusetzen hat.

Anmerkung. In denjenigen Fällen, wo sich die Gleichungen $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$ leicht nach x und y auflösen lassen, ist es vorzuziehen, von den Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$
$$\text{etc.}$$

auszugehen. Das weitere Verfahren ist dem vorigen ganz analog.

4) Es seien endlich in dem Ausdrucke 2) anstatt der drei veränderlichen Grössen x, y, z drei neue veränderliche Grössen u, v, w einzuführen, welche mit den früheren durch die Gleichungen

$$\varphi_1(x, y, z, u, v, w) = 0,$$
$$\varphi_2(x, y, z, u, v, w) = 0,$$
$$\varphi_3(x, y, z, u, v, w) = 0$$

verbunden sind und von denen w als abhängige, u und v als unabhängige Variablen betrachtet werden sollen.

Ausgehend von den Gleichungen

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$
etc.,

in welche man für $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, etc. die aus den Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ (nach §. 10) folgenden Werthe zu setzen hat, erhält man neue Gleichungen, aus welchen man die Werthe von $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc. entnehmen und in 2) substituiren kann.

Anmerkung. Sind aus den gegebenen Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ die Grössen x, y, z leicht als Functionen von u, v, w zu erhalten, so wird es in vielen Fällen vorzuziehen sein, von den Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$
etc.

auszugehen.

§. 14. Beispiele.

1) In der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (y-a)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

soll y als unabhängige Veränderliche eingeführt werden.

Es wird

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2-(y-a)\frac{d^2x}{dy^2}=0.$$

2) Zur Berechnung des Krümmungshalbmessers einer ebenen Curve, bei welcher y als Function von x betrachtet wird, dient die Formel

$$\varrho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Dieser Ausdruck geht, wenn x als abhängige, y als unabhängige Veränderliche betrachtet wird, in den folgenden über:

$$\varrho=\frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2x}{dy^2}}.$$

3) In der Gleichung

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+u=0$$

soll y mittelst der Relation $y=lx$ als unabhängige Veränderliche eingeführt werden. Man erhält

$$\frac{d^2u}{dy^2}+u=0.$$

4) $(1-x^2)^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-2x(1-x^2)\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0,\ x=\sin t;$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+1=0.$$

5) $y+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}=0,\ x^2=4t;$

$$y+\frac{dy}{dt}+t\frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

(Fourier, Traité de la chaleur).

6) In der Gleichung

$$\frac{du}{dy}+\frac{u}{\sqrt{1+y^2}}=a$$

soll $x=l(y+\sqrt{1+y^2})$ als unabhängige Variable eingeführt werden.

Der Ausdruck für x gibt durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \text{folglich wird}$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{2}{e^x+e^{-x}}.$$

Aus der Gleichung zwischen x und y folgt ferner

$$e^x = y + \sqrt{1+y^2}, \text{ daher } y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

und $$\sqrt{1+y^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Setzt man die so erhaltenen Werthe ein, so ergibt sich

$$\frac{du}{dx} + u = \frac{a}{2}(e^x + e^{-x}).$$

7) $$(1-y^2)\frac{d^2u}{dy^2} - y\frac{du}{dy} + n^2u = 0, \; x = \arccos y;$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + n^2u = 0.$$

8) $$(x-x^3)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-3x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0, \; x = \sqrt{1-t^2};$$

$$(t-t^3)\frac{d^2y}{dt^2} + (1-3t^2)\frac{dy}{dt} - ty = 0.$$

9) $$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi;$$

$$\varrho = \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}},$$ wenn φ als unabhängige Variable betrachtet werden soll; dagegen

$$\varrho = \frac{\left[1+r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{2\frac{d\varphi}{dr} + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^3 + r\frac{d^2\varphi}{dr^2}},$$ wenn r als unabhängige Variable betrachtet werden soll.

10) Unter der Voraussetzung, dass

$$u = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2, \; \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

soll bewiesen werden, dass

$$u\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2.$$

11) Es sei u eine Function von r. Setzt man $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, so besteht die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Es soll hieraus eine Gleichung hergeleitet werden, in welcher u nur in Bezug auf r differentiirt vorkommt.

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0.$$

12) Welchen Werth hat der Ausdruck

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y},$$

wenn $x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi$

gesetzt wird, wo r und φ zwei neue unabhängige veränderliche Grössen bedeuten?

Man erhält

$$r \frac{\partial z}{\partial r}.$$

13) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = 0.$$

14) Wenn x, y, z und ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes des Raumes in zwei verschiedenen rechtwinkligen Coordinatensystemen bezeichnen, so ist zu zeigen, dass, wenn u eine Function von x, y, z bezeichnet,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}.$$

Die Lösung dieser Aufgabe setzt die Kenntniss derjenigen Formeln der analytischen Geometrie des Raumes voraus, welche die Coordinatentransformation betreffen.

15) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi,\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi,\ z = r \cos \vartheta.$$

Führt man die Hülfsgrösse $\varrho = r \sin \vartheta$ ein, so erhält man nach Aufgabe 13)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Ferner ist $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\operatorname{cotang}\vartheta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$.

Diese drei Gleichungen addirt, folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\operatorname{cotang}\vartheta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}.$$

Ersetzt man ϱ wieder durch seinen Werth, so wird die vorgelegte Gleichung

$$r\frac{\partial^2(ur)}{\partial r^2}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta}=0.$$

(Ueber die Transformation dieser Gleichung sehe man Jacobi: Ueber eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$; Crelle's Journal Bd. 36, pag. 113—134).

16) Es soll der Ausdruck

$$\frac{y-x}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}}$$

mittelst der Gleichungen

$$u=l\sqrt{x^2+y^2},\; v=\operatorname{arctang} z,\; t=x+y+z$$

umgeformt werden, wenn u als abhängige, v und t als unabhängige Variable betrachtet werden.

Man erhält

$$e^{2u}\left(\cos^2 v\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

§. 15. Homogene Functionen.

Eine Function $f(x, y, z, t, \ldots)$ der Veränderlichen $x, y, z, t, \ldots$ heisst **homogen** von der $n$ten Dimension oder von der $n$ten Ordnung, wenn sie die durch folgende Gleichung

$$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha t, \ldots)=\alpha^n f(x, y, z, t, \ldots),$$

in welcher α eine neue Variable bezeichnet, ausgedrückte Eigenschaft besitzt.

Differentiirt man diese Gleichung in Bezug auf α und setzt nach ausgeführter Differentiation $\alpha = 1$, so erhält man folgende Euler'schen Sätze:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} + \cdots = nu$$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cdots = n(n-1)u$$

etc.

Es ist eine nützliche Uebung, die Richtigkeit dieser Sätze an einigen Beispielen durch wirkliche Ausführung der Differentiationen nachzuweisen.

1) $u = \frac{x^2 + y^2}{y - x}$. $(n = 1)$

2) $u = \operatorname{arctang}\frac{x + y}{x - y}$. $(n = 0)$

3) $u = \left[l\,\frac{x^4 + y^4}{x^4 - y^4}\right]^3$. $(n = 0)$

4) Bezeichnet $w = f(x, y, z)$ eine homogene Function der Veränderlichen x, y, z und $\omega = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$ diejenige Function, welche aus f hervorgeht, indem man für x, y, z ganze lineare Functionen der Veränderlichen ξ, η, ζ einsetzt, so ist zu beweisen, dass

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x} + y_1\frac{\partial f}{\partial y} + z_1\frac{\partial f}{\partial z} = \xi_1\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \eta_1\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \zeta_1\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta},$$

wenn x_1, y_1, z_1 diejenigen Werthe der Variablen x, y, z bezeichnen, welche den Werthen ξ_1, η_1, ζ_1 der Variablen ξ, η, ζ entsprechen.

Capitel V.

Der Taylor'sche und der Maclaurin'sche Lehrsatz.

§. 16. Lehrsätze.

I. Die Taylor'sche Reihe.

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot\frac{h}{1}+f''(x)\cdot\frac{h^2}{1.2}+f'''(x)\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\cdots+$$
$$+f^{(n-1)}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+R_n.$$

II. Die allgemeine Maclaurin'sche Reihe.

$$f(x)=f(a)+f'(a)\cdot\frac{(x-a)}{1}+f''(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{1.2}+f'''(a)\cdot\frac{(x-a)^3}{1.2.3}+\cdots+$$
$$+f^{(n-1)}(a)\cdot\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+R_n,$$

wo a eine Constante bedeutet.

Wird hierin $a=0$ gesetzt, so entsteht:

III. Die specielle Maclaurin'sche Reihe.

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot\frac{x}{1}+f''(0)\cdot\frac{x^2}{1.2}+f'''(0)\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots+$$
$$+f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n.$$

In Bezug auf alle diese Reihen legen wir die Voraussetzung zu Grunde, dass die Function $f(x)$ nebst ihren n ersten Ableitungen in dem betrachteten Intervalle endlich, stetig und eindeutig sei.

Wenn $f(x)$ eine ganze, rationale Function von x bezeichnet, so brechen die drei Reihen bei einem gewissen Gliede ab. In allen andern Fällen muss der Summe der n ersten Glieder, sofern man eine dieser Reihen mit dem n ten Gliede abbrechen will, noch ein sogenanntes Restglied zugefügt werden, welches in den obigen Gleichungen mit R_n bezeichnet worden ist. Die Schätzung der Grösse dieses Restgliedes erlaubt ein Urtheil über den Grad der Annäherung, mit welcher die Summe der ersten n Glieder der Reihe den Functionswerth darstellt.

Besitzt dieses Restglied die Eigenschaft, unendlich klein zu werden, wenn n unendlich gross wird, so stellt für jeden zulässigen Werth von x die Summe der in's Unendliche fortgeführten Reihe den Werth der entwickelten Function genau dar.

Von den verschiedenen Formen, unter welchen das Restglied dargestellt werden kann, sind die wichtigsten folgende:

Restglied der Taylor'schen Reihe.

$$R_n = \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x + \vartheta h), \qquad R_n = \frac{h^n(1-\vartheta')^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(x + \vartheta' h).$$

Restglied der allgemeinen Maclaurin'schen Reihe.

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}[a+\vartheta(x-a)], \quad R_n = \frac{(x-a)^n(1-\vartheta')^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}[a+\vartheta'(x-a)].$$

Die in diesen Formeln auftretenden Grössen ϑ und ϑ' bezeichnen nicht näher bekannte, positive, ächte Brüche. Die erste Form des Restes wird gewöhnlich auf Lagrange zurückgeführt; die zweite rührt von Cauchy her.

IV. Die Taylor'sche Reihe für Functionen mehrerer Veränderlichen.

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} h^2 k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} k^3\right) + \cdots$$

V. Die Maclaurin'sche Reihe für Functionen mehrerer Veränderlichen.

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,b} \cdot (x-a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b} \cdot (y-b)\right] + \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{a,b} \cdot (x-a)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{a,b} \cdot (x-a)(y-b) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{a,b} \cdot (y-b)^2\right] + \cdots,$$

wo a und b Constanten bezeichnen.

Die Restglieder, welche zu diesen Reihen hinzuzufügen sind, sind den vorhin angegebenen ganz analog.

§. 17. Beispiele.

1) Sei $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x + 3$.

α) Man bilde $f(x+h)$ mit Hülfe des Taylor'schen Lehrsatzes,

β) ordne $f(x)$ nach steigenden Potenzen von $(x-1)$ mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes,

γ) ordne $f(x)$ nach steigenden Potenzen von $(x+1)$.

α) $f(x+h) = x^4+2x^3-5x+3+(4x^3+6x^2-5).h+(6x^2+6x).h^2+$
$+(4x+2).h^3+h^4$,

β) $f(x) = 1+5(x-1)+12(x-1)^2+6(x-1)^3+(x-1)^4$,

γ) $f(x) = 7-3(x+1)-2(x+1)^3+(x+1)^4$.

2) $(x+h)^m$ zu entwickeln, wenn m eine beliebige Zahl bedeutet.

Bezeichnet man x^m mit $f(x)$, so ist $f^{(n)}(x) =$
$= m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$ und daher

$$(x+h)^m = x^m+m_1x^{m-1}h+m_2x^{m-2}h^2+m_3x^{m-3}h^3+\ldots+m_{n-1}x^{m-n+1}h^{n-1}+$$
$$+m_n(x+\vartheta h)^{m-n}h^n.$$

Die Reihe ist convergent, wenn h, absolut genommen, kleiner als x ist.

Setzt man $x=1$ und x an die Stelle von h, so ist

$$(1+x)^m = 1+m_1x+m_2x^2+\ldots+m_{n-1}x^{n-1}+m_n(1+\vartheta x)^{m-n}x^n.$$

Die Reihe convergirt für $-1<x<+1$, für $x=+1$, wenn $-1<m<+\infty$ und für $x=-1$, wenn $m>0$.

Anmerkung. Zur Beurtheilung der Grösse des Restgliedes für diese Reihe ist für positive Werthe von x die Lagrange'sche, für negative Werthe von x hingegen die Cauchy'sche Form des Restgliedes

$$R_n = n.m_nx^n(1+\vartheta' x)^{m-n}(1-\vartheta')^{n-1}$$

geeignet. Die Fälle $x=\pm 1$ bedürfen einer besondern Untersuchung. Sie können leicht z. B. durch Anwendung des Gauss'schen Convergenzkriteriums erledigt werden. (Gauss, Disquisitiones gen. circa seriem inf. $1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\cdots$). Man sehe auch Abel: Untersuchungen über die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots$, Crelle's Journal Bd. I, S. 311.

3) $$l(x+h) = lx+\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3-\cdots+\frac{(-1)^n}{n-1}\left(\frac{h}{x}\right)^{n-1}-$$
$$-\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{h}{x+\vartheta h}\right)^n$$
$(h$ abs. $<x)$.

Wird $x=1$ und x an Stelle von h gesetzt, so erhält man hieraus

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^n$$

$$(-1 < x \leqq 1)$$

Anmerkung. Für negative Werthe von x kann zur Beurtheilung der Grösse des Restgliedes wieder die Cauchy'sche Form für das Restglied

$$R_n = (-1)^{n-1} \frac{(1-\vartheta')^{n-1} x^n}{(1+\vartheta' x)^n}$$

dienen.

Ebenso ist

$$l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$$(-1 \leqq x < 1).$$

Zusatz 1. $l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$

Zusatz 2. Setzt man in der letzten Formel $\frac{1+x}{1-x} = \frac{y+h}{y}$, also $x = \frac{h}{2y+h}$, so folgt

$$l(y+h) = ly + 2\left[\frac{h}{2y+h} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2y+h}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{h}{2y+h}\right)^5 + \cdots\right],$$

eine Formel, welche aus dem Logarithmus einer Zahl y den Logarithmus von $(y+h)$, wo h positiv oder negativ sein kann, zu berechnen lehrt.

4) Man lasse in

$$f(x) = \frac{a+x}{a-x}$$

x in $x+h$ übergehen und ordne $f(x+h)$ nach steigenden Potenzen von h.

Da $f'(x) = \frac{2a}{(a-x)^2}$, so ist nach Aufg. 10, §. 6

$$f^{(n)}(x) = \frac{2.2.3.4\ldots n}{(a-x)^{n+1}} a \text{ und daher}$$

$$\frac{a+x+h}{a-x-h} =$$

$$= \frac{a+x}{a-x} + 2a\left\{\frac{h}{(a-x)^2} + \frac{h^2}{(a-x)^3} + \frac{h^3}{(a-x)^4} + \cdots + \frac{h^n}{[a-(x+\vartheta h)]^{n+1}}\right\}.$$

5) Sei $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Es soll unter der Voraussetzung, dass x^2 nicht gleich 1 ist, $f(x+h) = \frac{1}{\sqrt{1-(x+h)^2}}$ nach Potenzen von h entwickelt werden.

Mit Hülfe von Aufg. 23, §. 6 erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{1-(x+h)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[1+\frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{h}{1}+\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3x(3+2x^2)}{(1-x^2)^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{3(3+24x^2+8x^4)}{(1-x^2)^4}\cdot\frac{h^4}{1.2.3.4}+\cdots\right].$$

6) $\sin(x+h)$ nach Potenzen von h zu entwickeln.

$$\sin(x+h) = \sin x+\frac{\cos x}{1!}h-\frac{\sin x}{2!}h^2-\frac{\cos x}{3!}h^3+\frac{\sin x}{4!}h^4+\cdots+$$

$$+\frac{\sin\left(x+\vartheta h+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}h^n.$$

7) $\cos(x+h)$ nach Potenzen von h zu entwickeln.

$$\cos(x+h) = \cos x-\frac{\sin x}{1!}h-\frac{\cos x}{2!}h^2+\frac{\sin x}{3!}h^3+\frac{\cos x}{4!}h^4-\cdots+$$

$$+\frac{\cos\left(x+\vartheta h+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}h^n.$$

8) $\operatorname{arctang}(x+h)$ nach Potenzen von h zu entwickeln.

Nach Aufgabe 44, §. 6 ist

$$\frac{d^n \operatorname{arctang} x}{dx^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\sin^n\varphi\sin n\varphi, \text{ wenn } x = \operatorname{cotang}\varphi,$$

und man erhält

$$\operatorname{arctang}(x+h) = \operatorname{arctang} x+\sin^2\varphi\,.\,h-\sin^2\varphi\sin 2\varphi\cdot\frac{h^2}{2}+$$

$$+\sin^3\varphi\sin 3\varphi\cdot\frac{h^3}{3}-\sin^4\varphi\sin 4\varphi\cdot\frac{h^4}{4}+\cdots$$

9) $\operatorname{arccotang}(x+h)$ nach Potenzen von h zu entwickeln.

Die Lösung kann auf ähnliche Weise wie die der vorhergehenden Aufgabe erhalten werden. Sie geht aber auch aus dem soeben erhaltenen Resultate hervor durch die Substitutionen

$$\operatorname{arctang}(x+h) = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arccotang}(x+h),$$

$$\operatorname{arctang} x = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arccotang} x = \frac{\pi}{2}-y$$

$$\varphi = \operatorname{arccotang} x = y.$$

Es folgt

$$\operatorname{arccotang}(x+h) = y-\sin^2 y\cdot\frac{h}{1}+\sin^2 y\sin 2y\cdot\frac{h^2}{2}-\sin^3 y\sin 3y\cdot\frac{h^3}{3}+\cdots$$

10) Es bezeichne $y = f(x)$ denjenigen Bogen, dessen trigonometrische Tangente den natürlichen Logarithmus x besitzt; man entwickle $f(x+h)$ nach Potenzen von h.

Die Gleichung $x = l\,\mathrm{tang}\,y$ liefert ohne Schwierigkeit die successiven nach x genommenen Ableitungen von y. Es wird

$$f(x+h) = y + \sin 2y \cdot \frac{h}{1} + \sin 2y \cos 2y \cdot \frac{h^2}{1.2} + \sin 2y \cos 4y \cdot \frac{h^3}{3!} + \\ + \sin 2y (\cos 6y - \sin 2y \sin 4y) \cdot \frac{h^4}{4!} + \cdots$$

11) a^x nach Potenzen von x zu entwickeln.

Mit Hülfe des Maclaurin'schen Lehrsatzes erhält man, wenn $f(x) = a^x$ gesetzt wird, wornach $f'(0) = la$, $f''(0) = (la)^2, \ldots f^{(n)}(0) = (la)^n$,

$$a^x = 1 + \frac{x}{1!} la + \frac{x^2(la)^2}{2!} + \frac{x^3(la)^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}(la)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n(la)^n}{n!} a^{\vartheta x}.$$

Die Reihe convergirt für jeden endlichen Werth von x.

Zusatz 1. $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\vartheta x}$$

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2{,}718281828459\ldots$$

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = 0{,}367879441171\ldots$$

Zusatz 2. Setzt man $e^x = z$, so wird $x = lz$, also

$$z = 1 + \frac{lz}{1!} + \frac{(lz)^2}{2!} + \frac{(lz)^3}{3!} + \frac{(lz)^4}{4!} + \cdots$$

12) $\sin x$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \sin\left(\vartheta x + n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$(-\infty < x + \infty).$$

$\sin 1^0 = \sin 0{,}0174533 = 0{,}0174533 - 0{,}0000009 = 0{,}0174524.$

13) $\cos x$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cos\left(\vartheta x + n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$(-\infty < x < +\infty).$$

$\cos 1^0 = 1 - 0{,}0001523 = 0{,}9998477.$

Anmerkung. Setzt man in den Beispielen 6) und 7) die Reihen bis in's Unendliche fort und fasst die Glieder zusammen, welche mit $\cos x$, beziehungsweise mit $\sin x$ multiplicirt sind, so erhält man die bekannten Formeln

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h,$$
$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h.$$

14) $l \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

$$l \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = l \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{1!}x - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3!}x^3 - \frac{80}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\log\sin(30^0+10'') - \log\sin 30^0 = 0{,}43429448(1{,}7320508 . 0{,}00004848) =$$
$$= 0{,}0000365.$$

Man vergleiche die betreffende Differenz in den Logarithmentafeln.

15) $\arcsin x$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

Nach Aufgabe 4, §. 7 ist $f^{(2n+1)}(0) = 1.3^2.5^2 \ldots (2n-1)^2$,
$f^{(2n)}(0) = 0$; folglich

$$\arcsin x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1.3^2}{5!}x^5 + \frac{1.3^2.5^2}{7!}x^7 + \cdots$$
$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$
$$(-1 < x < +1).$$

Zusatz. Setzt man $\arcsin x = z$, so ist

$$z = \sin z + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 z}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 z}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin^7 z}{7} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7.2^7} + \cdots = 0{,}523599.$$

16) $\arccos x$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

Auf analoge Weise, wie in der vorigen Aufgabe, oder auch durch die Substitution von $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ in das soeben erhaltene Resultat folgt

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \cdots$$
$$(-1 < x < +1).$$

Zusatz. Setzt man $\arccos x = z$, so ist

$$z = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos z}{1} - \frac{1}{2}\frac{\cos^3 z}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{\cos^5 z}{5} - \cdots$$

17) $\operatorname{arctang} x$ zu entwickeln.

Da nach Aufg. 3, §. 7

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n . 1 . 2 . 3 \ldots (2n),$$
$$f^{(2n)}(0) = 0,$$

so erhält man

$$\operatorname{arctang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$
$$(-1 < x < +1).$$

Um das Lagrange'sche Restglied zu erhalten, erinnere man sich, dass (Aufg. 44, §. 6)

$$\frac{d^n \operatorname{arctang} x}{dx^n} = (-1)^{n-1}(n-1)! \sin^n\varphi \sin n\varphi,$$

wo $\varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctang} x$, also $\sin^n\varphi = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}$. Daher lautet das Restglied

$$\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+\vartheta^2x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin n\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctang} \vartheta x\right),$$

und man erkennt leicht, dass obige Reihe convergirt und ihre Summe mit $\operatorname{arctang} x$ übereinstimmt für jedes x, das, absolut genommen, kleiner als 1 ist.

Ist $\operatorname{arctang} x = z$, so wird

$$z = \frac{\operatorname{tang} z}{1} - \frac{\operatorname{tang}^3 z}{3} + \frac{\operatorname{tang}^5 z}{5} - \cdots \qquad \text{(Leibnitz'sche Reihe).}$$

Zus. Für $\operatorname{tang} z = 1$ ist $z = \frac{\pi}{4}$, also

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \cdots$$
$$= 2\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \cdots\right)$$
$$= 1 - 2\left(\frac{1}{3.5} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{11.13} \cdots\right).$$

Zur Berechnung von π eignen sich diese Reihen aber nicht*); bessere Formeln erhält man durch:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctang} \tfrac{1}{2} + \operatorname{arctang} \tfrac{1}{3} \text{ oder}$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctang} \tfrac{1}{2} + \operatorname{arctang} \tfrac{1}{5} + \operatorname{arctang} \tfrac{1}{8}.\text{**)}$$

---

*) Nach Euler müsste man nicht weniger als 10^{50} Glieder berechnen, um π auf 100 Stellen genau zu erhalten.

**) Durch diese letztere Formel ist die Zahl π durch Dahse in Zeit von 2 Monaten auf 200 Decimalstellen berechnet worden.

18) tang x nach Potenzen von x zu entwickeln.

Es sei tang $x = \varphi(x)$, alsdann ist:

$$\varphi'(x) = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + [\varphi(x)]^2;$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi''(x) = \varphi(x)\varphi'(x);$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi'''(x) = \varphi'(x)\varphi'(x) + \varphi(x)\varphi''(x);$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi^{IV}(x) = \varphi''(x)\varphi'(x) + 2\varphi'(x)\varphi''(x) + \varphi(x)\varphi'''(x);$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi^{(n+2)}(x) = \varphi^{(n)}(x)\varphi'(x) + n_1\varphi^{(n-1)}(x)\varphi''(x) + n_2\varphi^{(n-2)}(x)\varphi'''(x) + \cdots$$
$$+ n_3\varphi'''(x)\varphi^{(n-2)}(x) + n_2\varphi''(x)\varphi^{(n-1)}(x)$$
$$+ n_1\varphi'(x)\varphi^{(n)}(x) + \varphi(x)\varphi^{(n+1)}(x).$$

Nun ist

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi^{IV}(0) = \varphi^{VI}(0) = \ldots = \varphi^{(2p)}(0) = 0; \text{ also:}$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi^{(n+2)}(0) = \varphi^{(n)}(0)\varphi'(0) + n_2\varphi^{(n-2)}(0)\varphi'''(0) + n_4\varphi^{(n-4)}(0)\varphi^{V}(0)$$
$$+ n_6\varphi^{(n-6)}(0)\varphi^{VII}(0) + \cdots$$
$$\varphi'(0) = 1;\ \varphi'''(0) = 2;\ \varphi^{V}(0) = 16 = 2^4;\ \varphi^{VII}(0) = 2^4 . 17;$$
$$\varphi^{IX}(0) = 2^8.31;\ \varphi^{XI}(0) = 2^9.691;\ \varphi^{XIII}(0) = 2^{12}.5461.$$

Es ist also:

$$\tan x = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2^4}{5!}x^5 + \frac{2^4.17}{7!}x^7 + \frac{2^8.31}{9!}x^9 +$$
$$+ \frac{2^9.691}{11!}x^{11} + \frac{2^{12}.5461}{13!}x^{13} + \cdots$$

Allgemein ist

$$\tan x = \frac{B_1.2^2.(2^2-1)}{2!}x + \frac{B_3.2^4(2^4-1)}{4!}x^3 + \frac{B^5.2^6(2^6-1)}{6!}x^5 + \cdots,$$

worin die Coefficienten B die sogenannten Bernoulli'schen Zahlen sind, und zwar ist

$$B_1 = \tfrac{1}{6},\ B_3 = \tfrac{1}{30},\ B_5 = \tfrac{1}{42},\ B_7 = \tfrac{1}{30},\ B_9 = \tfrac{5}{66},\ B_{11} = \tfrac{691}{2730},$$
$$B_{13} = \tfrac{7}{6},\ B_{15} = \tfrac{3617}{510} \text{ etc.}$$

Diese Zahlen befolgen kein einfaches Bildungsgesetz. Durch andere Betrachtungen kann man nachweisen, dass die Reihe für tang x nur dann convergent ist, wenn der absolute Betrag von x kleiner ist als $\frac{\pi}{2}$.

Beispiel. $\tan 18^0 = \tan\frac{1}{10}\pi = 0{,}314159265 + 0{,}010335426 +$
$+ 0{,}000408026 + 0{,}000016300 + 0{,}000000652 + 0{,}000000026 +$
$+ 0{,}000000001 = 0{,}324919696.$

19) $\sec x$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

Es sei $\sec x = f(x)$.

$$f'(x) = f(x).\operatorname{tang} x = f(x)\,\varphi(x);$$

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)\varphi(x) + n_1 f^{(n-1)}(x)\varphi'(x) + n_2 f^{(n-2)}(x)\varphi''(x) + \\ + n_3 f^{(n-3)}(x)\varphi'''(x) + n_4 f^{(n-4)}(x)\varphi^{IV}(x) + \dots.$$

Nun ist nach Aufg. 18 $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi^{IV}(0) \dots = 0$, daher

$$f^{(n+1)}(0) = n_1 f^{(n-1)}(0)\varphi'(0) + n_3 f^{(n-3)}(0)\varphi'''(0) + n_5 f^{(n-5)}(0)\varphi^{V}(0) + \\ + n_7 f^{(n-7)}(0)\varphi^{VII}(0) + \dots$$

$$f'(0) = f'''(0) = f^{V}(0) = f^{(2p+1)}(0) = 0.$$

$$f(0) = 1;\ f''(0) = 1;\ f^{IV}(0) = 5;\ f^{VI}(0) = 61;\ f^{VIII}(0) = 1385;$$
$$f^{X}(0) = 50521;\ f^{XII}(0) = 2702765.$$

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 + \frac{61}{6!}x^6 + \frac{1385}{8!}x^8 + \frac{50521}{10!}x^{10} + \\ + \frac{2702765}{12!}x^{12} + \dots.$$

Die Bedingungen der Convergenz dieser Reihe sind dieselben, wie bei $\operatorname{tang} x$.

Beispiel. $\sec 18^0 = 1 + 0{,}049348017 + 0{,}002029356 +$
$+ 0{,}000081451 + 0{,}000003529 + 0{,}000000130 + 0{,}000000005 =$
$= 1{,}051462218.$

20) $\operatorname{cotang} x$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

Man entwickle zunächst $x \operatorname{cotang} x$ nach Aufg. 6; §. 7, wodurch man erhält

$$x \operatorname{cotang} x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \frac{2x^{10}}{93555} - \dots$$

Darnach wird

$$\operatorname{cotang} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \frac{2x^9}{93555} - \dots.$$

Allgemein ist

$$\operatorname{cotang} x = \frac{1}{x} - B_1 2^2 \frac{x}{2!} - B_3 2^4 \frac{x^3}{4!} - B_5 2^6 \frac{x^5}{6!} - \dots$$

Ueber die Convergenz dieser Reihe, welche sich von $x = -\pi$ bis $x = +\pi$, die Grenzen exclusive, erstreckt, gilt eine ähnliche Bemerkung, wie bei $\operatorname{tang} x$.

Anmerkung. Aus der Reihe für cotang x lässt sich diejenige für tang x leicht ableiten mittelst der Beziehung $2\,\text{cotang}\,2x = \text{cotang}\,x - \text{tang}\,x$.

21) $l\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

$$l\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) =$$
$$= l\,\text{tang}\,\frac{\pi}{4} + \frac{2^1}{1}x + \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{5.2^5}{5!}x^5 + \frac{61.2^7}{7!}x^7 + \frac{1385.2^9}{9!}x^9 + \cdots$$

$$\text{logtang}\,(45^0 + 10'') - \text{logtang}\,45^0 = 0{,}43429448\,.\,2\,.\,0{,}00004848 =$$
$$= 0{,}0000421.$$

Man vergleiche die betreffende Stelle in den Logarithmentafeln.

22a) $e^{\sin x}$ zu entwickeln.

Unter Berücksichtigung der in Aufg. 2, §. 7 erhaltenen Werthe folgt:

$$e^{\sin x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{8}{5!}x^5 - \frac{3}{6!}x^6 + \frac{56}{7!}x^7 + \frac{217}{8!}x^8 +$$
$$+ \frac{64}{9!}x^9 - \frac{2951}{10!}x^{10} - \frac{2^7.3^2.11}{11!}x^{11} - \frac{3\,.\,11\,.\,181}{12!}x^{12} \ldots$$

22b) $e^{\text{tang}\,x}$ zu entwickeln.

Es sei $e^{\text{tang}\,x} = F(x)$, $\text{tang}\,x = \varphi(x)$, mithin
$$F'(x) = F(x)\varphi'(x).$$

Differentiirt man diese Gleichung p mal nach einander nach dem Leibnitz'schen Satze und berücksichtigt die aus Aufg. 18 bekannten Werthe der Ableitungen von $\varphi(x)$, so erhält man leicht eine Recursionsformel für $F^{(n+1)}(0)$. Es wird

$$e^{\text{tang}\,x} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \frac{9}{4!}x^4 + \frac{37}{5!}x^5 + \frac{177}{6!}x^6 +$$
$$+ \frac{959}{7!}x^7 + \frac{6097}{8!}x^8 + \frac{41641}{9!}x^9 + \cdots.$$

23) Aufgabe. Es sollen Formeln für $\sin nz$ und $\cos nz$ aufgefunden werden.

Setzt man $\varphi(x) = \sin(n\arcsin x) = \sin nz$ und bildet nach Aufg. 7, §. 7 die successiven Ableitungen von $\varphi(x)$ für den speciellen Werth $x = 0$, so liefert der Maclaurin'sche Lehrsatz

$$\sin nz = \frac{n\sin z}{1!} - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\sin^3 z + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5 z - \cdots$$

Durch Differentiation erhält man

$$\cos nz = \cos z\left(1 - \frac{n^2 - 1^2}{2!}\sin^2 z + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4 z - \cdots\right).$$

Diese beiden Reihen brechen ab, wenn n eine ungrade Zahl ist.

Z. B.
$$\begin{aligned}
\sin 3z &= 3\sin z - 4\sin^3 z,\\
\sin 5z &= 5\sin z - 20\sin^3 z + 16\sin^5 z,\\
\sin 7z &= 7\sin z - 56\sin^3 z + 112\sin^5 z - 64\sin^7 z;\\
\cos 3z &= \cos z\,(1 - 4\sin^2 z),\\
\cos 5z &= \cos z\,(1 - 12\sin^2 z + 16\sin^4 z),\\
\cos 7z &= \cos z\,(1 - 24\sin^2 z + 80\sin^4 z - 64\sin^6 z).
\end{aligned}$$

Nimmt man $f(x) = \cos(n \arcsin x)$ (Aufg. 8, §. 7), so findet man ganz in derselben Weise wie oben

$$\cos nz = 1 - \frac{n^2}{2!}\sin^2 z + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4 z - \cdots,$$

$$\sin nz = \cos z\left(n\sin z - \frac{n(n^2-2^2)}{3!}\sin^3 z + \cdots\right).$$

Ist n eine grade Zahl, so brechen beide Reihen ab.

Beispiel:
$$\begin{aligned}
\cos 2z &= 1 - 2\sin^2 z,\\
\cos 4z &= 1 - 8\sin^2 z + 8\sin^4 z,\\
\cos 6z &= 1 - 18\sin^2 z + 48\sin^4 z - 32\sin^6 z;\\
\sin 2z &= \cos z\,.\,2\sin z,\\
\sin 4z &= \cos z\,(4\sin z - 8\sin^3 z),\\
\sin 6z &= \cos z\,(6\sin z - 32\sin^3 z + 32\sin^5 z).
\end{aligned}$$

Setzt man $f(x) = \cos(n \arccos x)$ (Aufg. 9, §. 7), so ist für ein ungrades n:

$$\cos nz = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(n\cos z - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\cos^3 z + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\cos^5 z - \cdots\right).$$

Hieraus

$$\sin nz = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin z\left(1 - \frac{n^2-1^2}{2!}\cos^2 z + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\cos^4 z - \cdots\right).$$

Für ein grades n ist

$$\cos nz = (-1)^{\frac{n}{2}}\left(1 - \frac{n^2\cos^2 z}{2!} + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\cos^4 z - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\cos^6 z + \cdots\right),$$

$$\sin nz =$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}} \sin z \left(-n\cos z + \frac{n(n^2-2^2)}{3!}\cos^3 z - \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\cos^5 z + \cdots\right).$$

Es ist also:

$$\cos 3z = -3\cos z + 4\cos^3 z,$$
$$\cos 5z = 5\cos z - 20\cos^3 z + 16\cos^5 z,$$
$$\cos 7z = -7\cos z + 56\cos^3 z - 112\cos^5 z + 64\cos^7 z;$$
$$\sin 3z = -\sin z + 4\sin z\cos^2 z,$$
$$\sin 5z = \sin z - 12\sin z\cos^2 z + 16\sin z\cos^4 z,$$
$$\sin 7z = -\sin z + 24\sin z\cos^2 z - 80\sin z\cos^4 z + 64\sin z\cos^6 z;$$
$$\cos 2z = -1 + 2\cos^2 z,$$
$$\cos 4z = 1 - 8\cos^2 z + 8\cos^4 z;$$
$$\sin 2z = 2\sin z\cos z,$$
$$\sin 4z = -4\sin z\cos z + 8\sin z\cos^3 z.$$

24) $(x+h)^m(y+k)^n = F(x+h,\ y+k)$ soll nach Potenzen von h und k entwickelt werden.

$$\begin{aligned}(x+h)^m(y+k)^n &= x^m y^n + m x^{m-1} y^n h + n x^m y^{n-1} k \\ &+ m_2 x^{m-2} y^n h^2 + mn\, x^{m-1} y^{n-1} hk + n_2 x^m y^{n-2} k^2 \\ &+ m_3 x^{m-3} y^n h^3 + n m_2 x^{m-2} y^{n-1} h^2 k \\ &+ m n_2 x^{m-1} y^{n-2} hk^2 + n_3 x^m y^{n-3} k^3 + \cdots\end{aligned}$$

25) $(x+h)\,l(y+k) = \varphi(x+h,\ y+k)$ nach Potenzen von h und k zu entwickeln.

Aufl. $(x+h)\,l(y+k) = x l y + [l y h + \frac{x}{y} k] + \frac{1}{2!}[2\frac{1}{y} hk - \frac{x}{y^2} k^2]$

$$+ \frac{1}{3!}[-3\frac{1}{y^2} hk^2 + \frac{2x}{y^3} k^3] + \frac{1}{4!}[4\frac{2!}{y^3} hk^3 - \frac{3!\,x}{y^4} k^4]$$

$$+ \frac{1}{5!}[-5\frac{3!}{y^4} hk^4 + \frac{4!\,x}{y^5} k^5] + \frac{1}{6!}[6\frac{4!}{y^4} hk^5 - \frac{5!}{y^5} k^6] + \cdots$$

$$= x l y + \frac{1}{y}[y l y h + xk] + \frac{k}{y^2}[yh - \tfrac{1}{2} xk]$$

$$- \frac{k^2}{y^3}[\tfrac{1}{2} yh - \tfrac{1}{3} xk] + \frac{k^3}{y^4}[\tfrac{1}{3} yh - \tfrac{1}{4} xk] - \frac{k^4}{y^5}[\tfrac{1}{4} yh - \tfrac{1}{5} xk] + \cdots$$

$$= x l y + \frac{1}{y}[y l y h + xk] + \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{p+1} \frac{k^p}{y^{p+1}}\left[\frac{1}{p} yh - \frac{1}{p+1} xk\right].$$

26) $\sin(x+y)$ nach Potenzen von x und y zu entwickeln.

Sowohl die Substitution von $x+y$ an Stelle von x in der Reihe für $\sin x$, als auch die Anwendung des Maclaurin'schen Lehrsatzes für Functionen zweier Veränderlichen liefert

$$\sin(x+y) = \frac{x+y}{1} - \frac{(x+y)^3}{3!} + \frac{(x+y)^5}{5!} - \cdots$$

$$= \frac{1}{1}(x+y) - \frac{1}{3!}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) + \frac{1}{5!}(x^5+5x^4y+10x^3y^2+ + 10x^2y^3+5xy^4+y^5) + \cdots$$

27) $\sin x . \sin y$ nach Potenzen von x und y zu entwickeln.

$$\sin x . \sin y = \frac{1}{2!}2xy - \frac{1}{4!}[4x^3y+4xy^3] + \frac{1}{6!}[6x^5y+20x^3y^3+6xy^5] - - \frac{1}{8!}[8x^7y+56x^5y^3+56x^3y^5+8xy^7] + \cdots$$

$$= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{(2p)!} \sum_{r=0}^{r=p-1} (2p)_{2r+1} x^{2p-2r-1} y^{2r+1} (-1)^{p+1}.$$

Es ist also, wenn $y = x$ gesetzt wird,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}(2x)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4!}(2x)^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6!}(2x)^6 + \cdots$$

Diese letztere Reihe lässt sich auch aus der Formel $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ und der Reihe für $\cos 2x$ ableiten.

28) $\cos x \cos y$ nach Potenzen von x und y zu entwickeln.

$$\cos x \cos y =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}(x^2+y^2) + \frac{1}{4!}(x^4+6x^2y^2+y^4) - \frac{1}{6!}(x^6+15x^4y^2+15x^2y^4+y^6) + + \frac{1}{8!}(x^8+28x^6y^2+70x^4y^4+28x^2y^6+y^8) - \cdots$$

$$= \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \frac{1}{(2p)!} \sum_{r=0}^{r=p} (2p)_{2r} x^{2p-2r} y^{2r}.$$

29) $\operatorname{arctang} \frac{x+h}{y+k}$ soll nach Potenzen von h und k entwickelt werden.

$$\operatorname{arctang}\frac{x+h}{y+k} = \operatorname{arctang}\frac{x}{y} + \frac{1}{1!}\left[\frac{y}{x^2+y^2}h - \frac{x}{x^2+y^2}k\right] + + \frac{1}{2!}\left[\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}h^2 + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}hk + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}k^2\right] + \cdots$$

30) Es sollen folgende Gleichungen mit besonderer Berücksichtigung derjenigen Methoden, welche sich auf den Taylor'schen und Maclaurin'schen Lehrsatz stützen, näherungsweise gelöst werden:

α) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$;
$x = -1,6506292$.

β) $x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$;
$x = 1,6117663$.

γ) $10 \log x = x$;
$x = 1,1371288$.

δ) $\operatorname{tang} x + x = 0$;
$x_1 = 116^0\ 14'\ 21''$,
$x_2 = 281^0\ 30'\ 16''$,
$x_3 = 457^0\ \ 8'\ 38''$,
etc.

Anleitung. Es sei $y = f(x) = 0$ die zu lösende Gleichung. Bezeichnet x_0 einen durch Versuch gefundenen Näherungswerth der Wurzel und $x_0 + h$ den wahren Werth derselben, so ist nach dem Taylor'schen Satze

$$0 = f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{1} + f''(x_0)\frac{h^2}{1.2} + \cdots$$

Kommt nun x_0 dem wahren Werth der Wurzel so nahe, dass h^2 und die höheren Potenzen von h vernachlässigt werden dürfen, so hat man zur Berechnung der Correction h die Gleichung

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)h,$$

woraus

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

$x_0 + h$ ist dann ein neuer Näherungswerth.

Diese Methode, welche von Newton herrührt, kann geometrisch so interpretirt werden, dass man die Curve $y = f(x)$ durch ihre Tangente ersetzt und den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Axe aufsucht, während der sogenannten Regula falsi

$$x = x_1 - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \cdot y_1$$

oder

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{2},$$

wo x_1 und x_2 Näherungswerthe, y_1 und y_2 die zugehörigen Resultate bezeichnen, die Annahme zu Grunde liegt, dass der zwischen zwei Punkten der Curve liegende Curvenbogen durch die Sehne ersetzt und der Schnittpunkt der Sehne mit der x-Axe aufgesucht wird.

Eine angemessene Verbindung der Newton'schen Methode mit der Regula falsi liefert zu gleicher Zeit zwei Grenzen, zwischen welchen die Wurzel enthalten sein muss. Hierbei hat man die Newton'sche Formel für denjenigen Näherungswerth anzuwenden, für welchen $f(x)$ und $f''(x)$ dasselbe Zeichen besitzen.

Ein weiteres Mittel zur Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$ liefert der Maclaurin'sche Lehrsatz, mit dessen Hülfe die Inversion der Function $f(x)$ erreicht werden kann.

Bezeichnet nämlich x_0, y_0 ein Werthepaar, welches der Gleichung $y = f(x)$ genügt, so gibt die Maclaurin'sche Reihe die Entwicklung

$$x = x_0 + \left(\frac{dx}{dy}\right)_0 \frac{y-y_0}{1} + \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_0 \frac{(y-y_0)^2}{1.2} + \left(\frac{d^3x}{dy^3}\right)_0 \frac{(y-y_0)^3}{1.2.3} + \cdots$$

Setzt man hierin $y = 0$ und für $\left(\frac{dx}{dy}\right)_0$, $\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_0$, ... ihre Werthe, nämlich

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_0 = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_0 = -\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3},$$

$$\left(\frac{d^3x}{dy^3}\right)_0 = -\frac{f'(x_0)f'''(x_0) - 3[f''(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^5}, \text{ etc.}$$

so erhält man, x_0 als Näherungswerth vorausgesetzt, für den neuen Näherungswerth x die Gleichung

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3} \frac{[f(x_0)]^2}{2} + $$
$$+ \frac{f'(x_0)f'''(x_0) - 3[f''(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^5} \cdot \frac{[f(x_0)]^3}{6} - \cdots$$

Vorausgesetzt wird bei allen diesen Näherungsmethoden, dass in dem betrachteten Intervalle $f'(x)$ weder sein Zeichen wechselt, noch gleich Null wird.

Capitel VI.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung des wahren Werthes einer Function, die für einen speciellen Werth der Veränderlichen in unbestimmter Form erscheint.

§. 18. Allgemeine Sätze und Regeln.

1) Bezeichnen $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei Functionen von x, welche nebst ihren n ersten Ableitungen in demselben Intervalle endlich, stetig und eindeutig sind und welche nebst ihren $(n-1)$ ersten Ableitungen für den speciellen Werth $x=a$ verschwinden, während $\varphi^{(n)}(a)$ von Null verschieden vorausgesetzt wird, so gilt für jeden innerhalb des Intervalles liegenden Werth von x der Satz

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f^{(n)}[a+\vartheta(x-a)]}{\varphi^{(n)}[a+\vartheta(x-a)]},$$

wo ϑ einen nicht näher bekannten, positiven, ächten Bruch bedeutet.

In dieser Gleichung erscheint der Ausdruck auf der linken Seite für $x=a$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ und verliert daher seine bestimmte Bedeutung. Aus der obigen Gleichung folgt aber, dass für $\lim x=a$, $\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}$ ist. Diesen Werth nennt man den wahren Werth des Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x=a$.

Der wahre Werth des Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, welcher für $x=a$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint, ist demnach gleich dem Werthe von $\frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}$, wenn die $n$ten Ableitungen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ die ersten sind, welche nicht zugleich verschwinden.

Dieser Satz gilt in dieser Form nur dann, wenn $f^{(n)}(a)$ und $\varphi^{(n)}(a)$ bestimmte Werthe haben; verlieren $f^{(n)}(a)$ und $\varphi^{(n)}(a)$ für $x=a$ ihre Bedeutung oder werden beide unendlich gross, während die übrigen Voraussetzungen bestehen bleiben, so tritt an die Stelle des vorigen

Satzes der folgende: Der wahre Werth von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $\lim x = a$, d. h. $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $\lim x = a$, stimmt überein mit dem Grenzwerthe des Quotienten $\frac{f^{(n)}(x')}{\varphi^{(n)}(x')}$ für $\lim x' = a$, vorausgesetzt, dass ein solcher Grenzwerth existirt.

2) Der Fall, wo die Function $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, wird auf den vorhergehenden zurückgeführt, wenn man schreibt $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$.

Auch für diesen Fall gilt ein dem im letzten Alinea von 1) ausgesprochenen ganz analoger Satz: $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ stimmt überein mit $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ für $\lim x = a$, vorausgesetzt, dass ein solcher Grenzwerth $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ für $\lim x = a$ existirt.

Zusatz. Derselbe Satz gilt für $a = \infty$.

3) Wenn $f(x).\varphi(x) = 0.\infty$ wird für $x = a$, so setze man $f(x).\varphi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, wodurch man einen der beiden vorhergehenden Fälle erhält.

4) Die unbestimmte Form $\infty - \infty$, unter welcher die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ für $x = a$ erscheinen kann, wird auf die Form $\frac{0}{0}$ zurückgeführt, indem man $\frac{1}{f(x)} = f_1(x)$ und $\frac{1}{\varphi(x)} = \varphi_1(x)$ setzt, wodurch man erhält

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{f_1(x)} - \frac{1}{\varphi_1(x)} = \frac{\varphi_1(x) - f_1(x)}{f_1(x)\varphi_1(x)}.$$

5) Nimmt die Function $[f(x)]^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der unbestimmten Formen 0^0, ∞^0 oder 1^∞ an, so erscheint beim Uebergang zur Exponentialfunction, wornach $[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x).lf(x)}$, der Exponent $\varphi(x).lf(x)$ unter einer der vorhergehenden unbestimmten Formen und kann demgemäss behandelt werden.

Wenn das allgemeine Verfahren mehrfache Differentiationen zur Bestimmung des wahren Werthes von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ erfordert, so ist es in vielen Fällen zweckmässig, Zähler und Nenner nach steigenden Potenzen von $(x - a)$ zu entwickeln. Da nach der Voraussetzung einige der Functionen $f(a)$, $f'(a), \ldots$ und $\varphi(a)$, $\varphi'(a), \ldots$ verschwinden werden, so wird sich eine gewisse Potenz von $(x - a)$ als gemeinschaftlicher Factor im Zähler und Nenner fortheben lassen; der übrig bleibende Bruch gibt für $x = a$ den gesuchten wahren Werth.

Falls eine Entwicklung des Zählers und Nenners eines Ausdrucks $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, welcher für $x = a$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint, nach Potenzen von $(x - a)$ mit nur ganzen Exponenten nicht möglich ist und in Folge dessen das allgemeine Verfahren nur mühsam oder auf Umwegen zum Ziele führt, kann der wahre Werth dieses Quotienten auf folgende Weise bestimmt werden: Man setze $(a + h)$ für x in die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ und entwickle sie nach steigenden Potenzen von h. Nach Hebung einer gewissen Potenz von h, welche hierbei im Zähler und Nenner von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ als gemeinsamer Factor auftritt, ergibt sich der wahre Werth des Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$, indem man in dem übrig bleibenden Bruche $h = 0$ setzt.

Die Bestimmung des wahren Werthes einer für $x = a$ unter unbestimmter Form erscheinenden Function kann häufig dadurch vereinfacht werden, dass man die gegebene Function durch Division von solchen Factoren befreit, welche für $x = a$ weder gleich Null, noch unendlich gross werden. Das Product aus dem wahren Werthe des übrig bleibenden Theiles in den bestimmten Werth der vernachlässigten Factoren liefert dann den wahren Werth der gegebenen Function.

§. 19. Beispiele.

Bei denjenigen Aufgaben, welche mit einem * bezeichnet sind, reicht eine einmalige Differentiation nicht hin.

1) $u = \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$; für $x = a$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{m}{n} a^{m-n}$.

2) $u = \frac{x^3-1}{x^3-2x^2+2x-1}$; für $x=1$, wird $u = \frac{0}{0} = 3$.

3) $u = \frac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$; für $x=5$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{3}{29}$.

4) $u = \frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$; für $x=-1$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{5}{8}$.

5) $u = \frac{x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{16}x+\frac{9}{32}}{x^4+\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}}$; für $x=-\frac{3}{4}$, wird $u = \frac{0}{0} = -\frac{120}{59}$.

6) $u = \frac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$; für $x=+2$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{3}{5}$, für $x=-2$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{3}{5}$.

7) $u = \frac{x^4+3x^3-7x^2-27x-18}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}$; für $x=+3$, wird $u = \frac{0}{0} = 10$, für $x=-3$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{10}$.

8) $u = \frac{x^4+x^3-11x^2-9x+18}{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}$; für $x=1$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{4}{5}$, für $x=-2$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{2}$, für $x=3$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{6}{7}$.

9) $*u = \frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}$; für $x=c$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{a}{b}$.

10) $*u = \frac{a^5+a^4x-ax^4-x^5}{a^4+2a^3x+2a^2x^2+2ax^3+x^4}$; für $x=-a$, wird $u = \frac{0}{0} = 2a$.

11) $u = \frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-4x^2+x+6}$; für $x=2$, wird $u = \frac{0}{0} = 0$.

12) $u = \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^4+2x^3-3x^2-8x-4}$; für $x=-1$, wird $u = \frac{0}{0} = \infty$, für $x=+2$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{3}$, für $x=-2$, wird $u = \frac{0}{0} = -1$.

13) $u = \frac{ax-x^2}{a^4-2a^3x+2ax^3-x^4}$; für $x=a$, wird $u = \frac{0}{0} = -\infty$.

14) $u = \frac{a-\sqrt[n]{a^n-x^n}}{x^n}$; für $x=0$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{na^{n-1}}$.

15) $u = \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$; für $x=a$, wird $u = \frac{0}{0} = \sqrt{\frac{3}{8}}$.

16) $u = \frac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{x-a}}$; für $x=a$, wird $u = \frac{0}{0} = a\sqrt{3}$.

Man dividire mit dem Nenner in den Zähler und setze im Quotienten $x=a$.

17) $u = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$; für $x=a$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

Setzt man $x = a + h$ und entwickelt Zähler und Nenner nach steigenden Potenzen von h, so folgt

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2ah+h^2}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{1+\frac{h}{a}}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{h}\,\sqrt{2a}\sqrt{1+\frac{h}{2a}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{a}-\cdots\right)-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{h}\,\sqrt{2a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{2a}-\cdots\right)} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}} \cdot \frac{1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{h}}{a}-\cdots}{\sqrt{2a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{2a}-\cdots\right)} =$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{h}}{a}-\cdots}{\sqrt{2a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{2a}-\cdots\right)}$$, woraus für $h = 0$, $u = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

18) *$u = \dfrac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{2ax-a^2}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{2ax-x^2}}$; für $x = a$, wird $u = \frac{0}{0} = -5a$.

19) $u = \dfrac{a^x - b^x}{x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = l\dfrac{a}{b}$.

20) $u = \dfrac{a^x - b^x}{l(1-x)}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = l\dfrac{b}{a}$.

21) $u = \dfrac{a^n - x^n}{l(a^n) - l(x^n)}$; für $x = a$, wird $u = \frac{0}{0} = a^n$.

22) $u = \dfrac{a^2 - \sqrt{a^4 - x^2}}{x^2}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \dfrac{1}{2a^2}$.

23) $u = \dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \sqrt{a}$.

Anstatt vom Zähler und vom Nenner die Ableitung zu bilden, kann man auch jede einzelne Quadratwurzel nach dem binomischen Satze entwickeln.

24) $u = \dfrac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{\sqrt{(x-a)^3}}$; für $x = a$, wird $u = \frac{0}{0} = 2a\sqrt{2a}$.

Dividirt man mit dem Nenner in den Zähler, so gibt der Quotient für $x = a$ unmittelbar den gesuchten wahren Werth.

25) $u = \dfrac{\alpha(x-a)+\beta\sqrt{x-a}}{\gamma(x-a)^2+\delta\sqrt[3]{x-a}}$; für $x = a$, wird $u = \frac{0}{0} = 0$.

Setzt man $\sqrt[6]{x-a}=t$, so folgt für $t=0$ der gesuchte wahre Werth.

26) $u = \dfrac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$; für $x=a$, wird $u=\frac{0}{0}=\frac{16}{9}a$.

27) $u = \dfrac{(x-c)\sqrt{x-b}+\sqrt{x-c}}{\sqrt{2c}-\sqrt{x+c}+\sqrt{x-c}}$; für $x=c$, wird $u=\frac{0}{0}=1$.

28) $^*u = \dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$; für $x=1$, wird $u=\frac{0}{0}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Durch Division ergibt sich:

$$u = x+2x^2+3x^3+\ldots\ldots+nx^n,$$

und für $x=1$:

$$u = 1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

29) $u = \dfrac{a+\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt[3]{x^3-a^3}-\sqrt{x^2-a^2}}$; für $x=a$, wird $u=\frac{0}{0}=0$.

30) $u = \dfrac{\sqrt[3]{2a^3-x^3}-\sqrt{5a^2-4x^2}}{x\sqrt[4]{8a^2x^2+8ax^3}-\sqrt[5]{20a^6x^4+12a^4x^6}}$;

für $x=a$, wird $u=\frac{0}{0}=\dfrac{20}{9a}$.

31) $u = \dfrac{x-\sqrt[3]{32a^2x-24ax^2}+\sqrt[6]{40a^3x^3+24a^2x^4}-\sqrt[3]{2x^3-a^3}}{3a(9x-10a)+\sqrt[4]{36a^3x+45x^4}\ \sqrt[3]{2x^3-a^3}}$;

für $x=a$, wird $u=\frac{0}{0}=\dfrac{1}{24a}$.

32) $^*u = \dfrac{x^x-x}{1-x+lx}$; für $x=1$, wird $u=\frac{0}{0}=-2$.

Weil $x=1$, so können wir den Factor x absondern und gelangen kürzer zum Resultate durch Differentiation von

$$\frac{x^{x-1}-1}{1-x+lx}.$$

Ebenso wird man finden, dass man vor der zweiten Differentiation x^{x-1} absondern kann und nur $\dfrac{x\,lx+x-1}{1-x}$ zu betrachten hat.

33) $u = \dfrac{xe^x+e^{-x}-e^x-xe^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; für $x=0$, wird $u=\frac{0}{0}=-1$.

Da $e^x=1$ für $x=0$, so kann man Zähler und Nenner durch e^x dividiren und die Differentiation ausführen an

$$\frac{x + e^{-2x} - 1 - x \,.\, e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}.$$

34) $*u = \dfrac{xe^{2x} + xe^{x} - 2e^{2x} + 2e^{x}}{(e^{x} - 1)^3}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{6}$.

Wenn $x = 0$, wird $e^x = 1$ und $u = \dfrac{x \,.\, e^x + x - 2e^x + 2}{(e^x - 1)^3}$.

35) $u = \dfrac{e^x - 1}{e^x . l(1 - x)}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = -1$.

$e^x = 1$, für $x = 0$, also $u = \dfrac{e^x - 1}{l(1 - x)}$.

36) $u = \dfrac{a^{lx} - x}{lx}$; für $x = 1$, wird $u = \frac{0}{0} = la - 1$.

37) $*u = \dfrac{a - x + a\,lx - a\,.\,l\,a}{a - \sqrt{2ax - x^2}}$; für $x = a$, wird $u = \frac{0}{0} = -1$.

38) $u = \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = 2$.

39) $u = \dfrac{\sin x}{x^2}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \infty$.

40) $*u = \dfrac{x - \sin x}{x^3}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{6}$.

Der wahre Werth von u kann sowohl nach der allgemeinen Methode, als auch dadurch erhalten werden, dass man für $\sin x$ die betreffende Potenzreihe einsetzt.

41) $*u = \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = 2$.

Die mehrfache Differentiation kann umgangen werden durch Einführung der bezüglichen Reihen für e^x, e^{-x} und $\sin x$.

42) $u = \dfrac{1 - \sin x + \cos x}{\sin 2x - \cos x}$; für $x = \frac{1}{2}\pi$, wird $u = \frac{0}{0} = 1$.

43) $*u = \dfrac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{3}$.

44) $u = \dfrac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$; für $x = \frac{1}{6}\pi$, wird $u = \frac{0}{0} = -3$.

45) $u = \dfrac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 1}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = 1$.

46) $u = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x \,.\, \sin^2 x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{2}$.

47) $u = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+x) - \sin\beta \, . \sin x}{\sin(\alpha+\beta+x)}$; für $x = \pi - \alpha - \beta$, wird $u = \frac{0}{0} = \sin\alpha$.

48) $^*u = \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = 1$.

49) $^*u = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2 . \cos x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = 4$.

50) $u = \frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1+a^2}{\cos^2 a}$.

51) $u = \frac{l \operatorname{tg} x}{l \operatorname{tg} 2x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{\infty}{\infty} = 1$.

52) $u = \frac{a^x \sin ax - b^x \sin bx}{g^x \sin gx - h^x \sin hx}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{a-b}{g-h}$.

53) $u = \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$; für $x = 1$, wird $u = \infty - \infty = -\frac{1}{2}$.

54) $^*u = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx}$; für $x = 1$, wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{2}$.

55a) $^*u = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$; für $x = 0$, wird $u = \infty - \infty = 0$.

55b) $^*u = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$; für $x = 0$, wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{3}$.

55c) $^*u = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3}$; für $x = 0$, wird $u = \infty - \infty = \infty$.

55d) Man bestimme den Krümmungsradius $\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ der durch die Gleichung $y = 15\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ dargestellten Curve für den Punkt $x = 0$, $y = 5$.

Es ist für diesen Punkt $\varrho = \frac{1}{2}$.

In diesen vier Beispielen gelangt man am kürzesten zum Ziele, indem man für $\sin x$ die betreffende Reihe einsetzt und $\sin^2 x$, resp. $\sin^3 x$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt. Darnach erhält man z. B. im Falle der Aufgabe 55b) folgende Rechnung:

$$u = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2}{x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + \cdots\right)^2}{x^4\left(1 - \frac{x^2}{6} + \cdots\right)^2} = \frac{x^2 - x^2\left(1 - 2\frac{x^2}{6} + \cdots\right)}{x^4\left(1 - 2\frac{x^2}{6} + \cdots\right)}.$$

Fasst man sämmtliche Glieder, in welchen x in der 6ten und in höheren Potenzen vorkommt, in dem Zeichen (x^6) zusammen, so kann man schreiben: $u = \dfrac{\frac{x^4}{3} + (x^6)}{x^4 + (x^6)} = \dfrac{\frac{1}{3} + (x^2)}{1 + (x^2)}$, woraus für $x = 0$ folgt $u = \frac{1}{3}$.

56) $^*u = \dfrac{1}{lx} - \dfrac{1}{x-1}$; für $x = 1$, wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{2}$.

57) $^*u = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2x \operatorname{tang} x}$; für $x = 0$, wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{6}$.

58) $u = x.\operatorname{tg} x - \dfrac{\pi}{2} \sec x$; für $x = \dfrac{\pi}{2}$, wird $u = \infty - \infty = -1$.

59) $^*u = \dfrac{1}{l(1+x)} - \dfrac{1}{x}$; für $x = 0$, wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{2}$.

Durch Einführung der Reihe für $l(1+x)$ kann die mehrfache Differentiation vermieden werden.

60) $^*u = \dfrac{x-1}{2x^2} + \dfrac{1}{x(e^{2x}-1)}$; für $x = 0$, wird $u = -\infty + \infty = \frac{1}{6}$.

61) $^*u = \dfrac{\pi x - 1}{2x^2} + \dfrac{\pi}{x(a^{2\pi x}-1)}$; für $x = 0$, wird $u = -\infty + \infty = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Dies ist die Summe der Reihe: $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{4+x^2} + \dfrac{1}{9+x^2} + \cdots$,

und für $x = 0$: $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots$

62) $u = \dfrac{\pi}{4x} - \dfrac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$; für $x = 0$, wird $u = \infty - \infty = \dfrac{\pi^2}{8}$;

u ist die Summe der Reihe: $\dfrac{1}{1^2+x^2} + \dfrac{1}{3^2+x^2} + \dfrac{1}{5^2+x^2} + \cdots$;

für $x = 0$: $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots$

63) $^*u = \dfrac{1}{a-x} - \dfrac{14a^2}{5a^3 - ax^2 - 4x^3}$; f. $x = a$, wird $u = \infty - \infty = -\dfrac{13}{14a}$.

Berücksichtigt man, dass $5a^3 - ax^2 - 4x^3 = (5a^2 + 5ax + 4x^2)(a - x)$, so genügt eine einfache Differentiation.

64) $^*u = \frac{l(x^{-1})}{\operatorname{cotg} x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{\infty}{\infty} = 0$.

65) $u = \frac{a^x}{x}$; für $x = \infty$, wird $u = \frac{\infty}{\infty} = \infty$.

66) $u = \frac{l\,x}{x}$; für $x = \infty$, wird $u = \frac{\infty}{\infty} = 0$.

67) $u = \frac{x^{-1}}{\operatorname{cotg} x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{\infty}{\infty} = 1$.

68) $^*u = \frac{l\left(1 - \frac{x}{a}\right)}{\operatorname{cotg} \frac{\pi x}{a}}$; für $x = a$, wird $u = \frac{\infty}{\infty} = 0$.

69) $^*u = \frac{l\,(x-1) + \operatorname{tang}\left(x\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{cotg} x\pi}$; für $x = 1$, wird $u = \frac{\infty}{\infty} = -2$.

70) $u = (1-x)\,.\,l(1-x)$; für $x = 1$, wird $u = 0\,.\,\infty = 0$.

71) $u = \frac{x^2-a^2}{x^2}\operatorname{tang}\left(\frac{x}{a}\frac{\pi}{2}\right)$; für $x = a$, wird $u = 0\,.\,\infty = -\frac{4}{\pi}$.

72) $u = (a-x)\,.\operatorname{tang}\left(\frac{x}{a}\frac{\pi}{2}\right)$; für $x = a$, wird $u = 0\,.\,\infty = \frac{2a}{\pi}$.

73) $u = \operatorname{tang}2x\,.\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$; für $x = \frac{\pi}{4}$, wird $u = \infty\,.\,0 = \frac{1}{2}$.

74) $u = \sec\left(x\frac{\pi}{2}\right) l\,\frac{1}{x}$; für $x = 1$, wird $u = \infty\,.\,0 = \frac{2}{\pi}$.

75) $u = 2^x\,.\operatorname{tang}\frac{a}{2^x}$; für $x = \infty$, wird $u = \infty\,.\,0 = a$.

76) $u = x^n\,.\,lx$; für $x = 0$ wird, wenn n positiv ist, $u = 0\,.\,\infty = 0$.

77a) $u = x^x$; für $x = 0$, wird $u = 0^0 = 1$.

77b) $u = x^{x^m}$; für $x = 0$ wird, wenn $m > 0$, $u = 0^0 = 1$ und wenn $m < 0$, $u = 0^\infty = 0$.

78) $u = x^{\frac{1}{x}}$; für $x = \infty$, wird $u = \infty^0 = 1$.

79a) $u = (1 + mx)^{\frac{1}{x}}$; für $x = 0$, wird $u = 1^\infty = e^m$.

79b) $u = (1+mx)^{\frac{1}{x}-n}$; für $x = 0$, wird $u = 1^\infty = e^m$.

80) $u = x^{\frac{1}{1-x}}$; für $x = 1$, wird $u = 1^\infty = e^{-1}$.

81) $u = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$; für $x = 0$, wird $u = \infty^0 = 1$.

82) $u = \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2a}}$; für $x = a$, wird $u = 1^\infty = e^{\frac{2}{\pi}}$.

83) $*u = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tang}\frac{\pi x}{a}}$; für $x = a$, wird $u = 0^0 = 1$.

84) $u = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tang} x}$; für $x = 0$, wird $u = \infty^0 = 1$.

85) $*u = (\cos mx)^{\frac{1}{\sin^2 nx}}$; für $x = 0$, wird $u = 1^\infty = e^{-\frac{m^2}{2n^2}}$.

86) $u = \left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)\right]^{\operatorname{cotang} x}$; für $x = 0$, wird $u = 1^\infty = e^{2a}$.

87) $u = \left(\cos\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\right)^x$; für $x = \infty$, wird $u = e^{-\pi}$.

88a) $u = \left(\frac{\operatorname{tang} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$; für $x = 0$, wird $u = (\frac{0}{0})^\infty = 1^\infty = 1$.

88b) $u = \left(\frac{\operatorname{tang} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; für $x = 0$, wird $u = (\frac{0}{0})^\infty = 1^\infty = e^{\frac{1}{3}}$

88c) $u = \left(\frac{\operatorname{tang} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$; für $x = 0$, wird $u = (\frac{0}{0})^\infty = 1^\infty = \infty$.

Am einfachsten gelangt man zu den in diesen drei Beispielen verlangten wahren Werthen auf folgende Weise:

$$\text{Es ist } \frac{\operatorname{tang} x}{x} = \frac{x + \frac{x^3}{3} + \cdots}{x} = \left(1 + \frac{x^2}{3} + \cdots\right)$$

und daher z. B. im Falle der Aufgabe 88b)

$$u = \left(1 + \frac{x^2}{3} + \cdots\right)^{\frac{1}{x^2}},\ lu = \frac{l\left(1 + \frac{x^2}{3} + \cdots\right)}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{3} + (x^4)}{x^2} = \tfrac{1}{3} + (x^2).$$

Folglich wird für $x = 0$, $lu = \frac{1}{3}$, also $u = e^{\frac{1}{3}}$.

Die Bezeichnung (x^4), (x^2) betreffend, vergleiche man die Bemerkung zu Aufgabe 55b).

89) $*u = x^{l(1+x)}$; für $x = 0$, wird $u = 0^0 = 1$.

90) $u = x^{\frac{a}{m+nlx}}$; für $x = 0$, wird $u = 0^0 = e^{\frac{a}{n}}$.

91) $*u = \left[\frac{l(ax)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$; für $x = \infty$, wird $u = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^0 = 0^0 = 1$.

92) $u = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$; für $x = 0$, wird $u = -\frac{e}{2}$;
denn differentiirt man Zähler und Nenner einmal, so folgt

$$\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1} - \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\, l(1+x)}{x^2} = (1+x)^{\frac{1}{x}-1}\left[\frac{1}{x} - \frac{(1+x)l(1+x)}{x^2}\right].$$

Der wahre Werth des ersten Factors für $x = 0$ ist nach Aufgabe 79b) gleich e. Setzt man nun für $l(1+x)$ die Potenzreihe ein und bildet das Product $(1+x)l(1+x)$ mit Vernachlässigung aller Potenzen von x, deren Exponent grösser als 2 ist, so ergibt sich leicht $-\frac{1}{2}$ als Grenzwerth des zweiten Factors für $x = 0$. Demnach wird für $x = 0$, $u = -\frac{e}{2}$.

93) $f(x, y) = y^4 - a^2y^2 + 2a^2x^2 - x^4 = 0$. Welchen Werth hat $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$, $y = 0$?

Wenn man auf die gewöhnliche Weise verfährt (nach §. 10, 1), so erhält man $\frac{dy}{dx} = \frac{2(x^3 - a^2x)}{2y^3 - a^2y}$. Dieser Ausdruck erscheint unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, weil für dieses Werthepaar $x = 0$, $y = 0$ sowohl $\frac{\partial f}{\partial x}$, als auch $\frac{\partial f}{\partial y}$, also auch df den Werth Null hat.

Ist überhaupt $f(a, b) = 0$ und $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,\, b} = 0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,\, b} = 0$, so erhält man $\frac{dy}{dx}$ durch Auflösung der Gleichung $(d^2f)_{a,\, b} = 0$, wenn nicht sämmtliche Coefficienten dieses Ausdrucks gleich Null sind. Wären für $x = a$, $y = b$ sämmtliche Coefficienten von $(d^2f)_{a,\, b} = 0$, so setze man $(d^3f)_{a,\, b} = 0$ u. s. w.

Im vorliegenden Falle bestimmt sich also $\frac{dy}{dx}$ aus der quadratischen Gleichung

$$(d^2f)_{0,\,0} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right)_{0,\,0} =$$
$$= [4(a^2 - 3x^2)dx^2 + 2(6y^2 - a^2)dy^2]_{0,\,0} = 4a^2dx^2 - 2a^2dy^2 = 0,$$

und zwar kann $\frac{dy}{dx}$ die beiden Werthe $\pm\sqrt{2}$ haben.

Die geometrische Interpretation ist folgende: Die Gleichung $f = 0$ stellt eine Curve vierten Grades dar, für welche der Coordinatenanfang ein Doppelpunkt ist. Die Tangenten in diesem Doppelpunkte sind gegeben durch die Beziehung $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha = \pm\sqrt{2}$.

In ähnlicher Weise verfahre man in den folgenden Beispielen.

94) Wenn $(y^2 + ax)^2 = x^2(a^2 + 2ax - x^2)$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm 1$.

95) Wenn $(y^2 - x^2)^2 = x^3 - 2axy^2$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

96) Wenn $y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm 5\sqrt{\frac{1}{24}}$.

97) Wenn $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm 1$.

98) Wenn $y^2(a - x) = x^3$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = 0$.

99) Wenn $(x^2 + y^2)^2 = a^2xy$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = 0$.

100) Wenn $y^4 + (a^2 + x^2)y^2 = a^2x^2$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm 1$.

101) Wenn $(x - y)(x^2 + y^2) = a(x + y)^2$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = -1$.

102) Wenn $(y^2 + x^2)^2 - 6axy^2 = ax^2(2x - a)$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \infty$.

Capitel VII.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung der Maxima und Minima der Functionen.

§. 20. Allgemeine Sätze und Regeln.

A. Absolute Maxima und Minima.

a) Explicite Functionen eines Argumentes. Versteht man unter $f(x)$ eine Function, welche nebst ihrer ersten Ableitung in dem Intervalle von x_1 bis x_2 endlich, stetig und eindeutig ist, so gelten, den Gang dieser Function betreffend, folgende Sätze:

1) In der Nähe eines jeden Werthes x_0 innerhalb des betrachteten Intervalles, für welchen $f'(x_0) \gtrless 0$ ist, gibt es sowohl solche Werthe des Argumentes, für welche die Function $f(x)$ grössere, als auch solche, für welche sie kleinere Werthe annimmt, als für x_0.

2) Wenn die Function $f(x)$ an beiden Grenzen des Intervalles $x_1\ x_2$ denselben Werth besitzt, so gibt es innerhalb dieses Intervalles wenigstens einen Werth von x, für welchen die erste Ableitung $f'(x)$ verschwindet.

3) Wenn die erste Ableitung der Function $f(x)$ innerhalb des betrachteten Intervalles ihr Zeichen nicht wechselt, so ist der Werth der Function an der oberen Grenze des Intervalles grösser oder kleiner als an der unteren, je nachdem $f'(x)$, allgemein zu reden, in dem Intervalle positiv oder negativ ist, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass $f'(x)$ für einzelne Werthe gleich Null werden kann.

4) Wenn die erste Ableitung der Function $f(x)$ für irgend einen innerhalb des Intervalles $x_1\ x_2$ liegenden Argumentswerth verschwindet und ihr Zeichen wechselt, so erreicht die Function für diesen Werth von x ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $f'(x)$ mit wachsendem Argument von positiven zu negativen oder von negativen zu positiven Werthen übergeht. Verschwindet die erste Ableitung dagegen, ohne

ihr Zeichen zu wechseln, so tritt für die Function $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum ein.

Macht man noch die Voraussetzung, dass die Function $f(x)$ Ableitungen aller Ordnungen besitze, welche in dem betrachteten Intervalle endlich, stetig und eindeutig sind, so erhält man zur Bestimmung derjenigen Werthe von x, für welche ein Maximum oder Minimum der Function innerhalb des Intervalles eintreten kann, folgende Regel: Man setze $f'(x) = 0$ und suche alle in dem betrachteten Intervalle liegenden Wurzeln dieser Gleichung auf. Hierauf berechne man für jeden dieser Werthe von x den zugehörigen Werth von $f''(x)$, wenn dieser gleich Null ist, den Werth von $f'''(x)$ und wenn auch dieser gleich Null ist, den Werth von $f^{IV}(x)$ u. s. f. Zur Entscheidung, ob ein Maximum oder Minimum oder keines von beiden eintritt, gilt dann der Satz: Ist die erste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von ungrader Ordnung, so tritt weder ein Maximum, noch ein Minimum ein; ist die erste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von grader Ordnung und positiv, so entspricht diesem Werthe ein Minimum der Function; ist dagegen die erste nicht verschwindende Ableitung von grader Ordnung und negativ, so entspricht diesem Werthe ein Maximum der Function.

Anmerkung 1. Wenn die erste Ableitung $f'(x)$ ein Bruch, etwa $\frac{y}{z}$, also $f''(x) = \frac{z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}}{z^2}$ ist, so richtet sich das Vorzeichen von $f''(x)$ nach demjenigen von $\frac{1}{z}\frac{dy}{dx}$.

Anmerkung 2. Ein Maximum oder Minimum einer Function kann aber auch auftreten für einen solchen speciellen Werth des Argumentes, welcher am Rande des betrachteten Intervalles liegt oder für welchen die früher gestellten Bedingungen, z. B. dass $f'(x)$ endlich und stetig sei, nicht erfüllt sind. Diese Fälle erfordern jedesmal eine besondere Untersuchung.

b) Explicite Functionen zweier Argumente. Es bezeichne $f(x, y)$ eine Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y, welche nebst ihren Ableitungen in dem Gebiete, für welches

der Gang dieser Function untersucht werden soll, endlich, stetig und eindeutig ist. Wenn die Werthe $x = a$, $y = b$ den beiden Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ genügen, so entspricht diesem Werthepaar ein Maximum oder Minimum der Function $f(x, y)$, je nachdem die vollständige Aenderung dieser Function in der Umgebung von $x = a$, $y = b$ negativ oder positiv ausfällt. Setzt man der Kürze wegen $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f_2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{12}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$, so liefert der Taylor'sche Lehrsatz für die erwähnte vollständige Aenderung, wenn man die Incremente der Variablen x und y mit h und k bezeichnet

$$f(x+h,\ y+k) - f(x, y) = f_1 h + f_2 k + \tfrac{1}{2}(f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2) + R.$$

Da nach der Voraussetzung für $x = a$, $y = b$ die Grössen f_1 und f_2 verschwinden, so hängt das Vorzeichen der vollständigen Aenderung von $f(x, y)$ bei hinreichend kleinen h und k nur von dem Vorzeichen der Summe der Glieder zweiter Ordnung ab. Nun ist aber

$$f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2 = f_{11}\left(h + \frac{f_{12}}{f_{11}}k\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12} \\ f_{21}, & f_{22} \end{vmatrix}}{f_{11}}\, k^2,$$

und man erkennt leicht, dass das Vorzeichen der Summe dieser zwei Quadrate nur dann von den speciellen Werthen h und k unabhängig ist, wenn die Functionaldeterminante $\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12} \\ f_{21}, & f_{22} \end{vmatrix}$ für das betrachtete Werthepaar einen positiven Werth hat.

Die Function $f(x, y)$ besitzt daher ein Maximum für die aus den Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ bestimmten Werthe $x = a$, $y = b$, wenn für diese Werthe zugleich $f_{11} < 0$ und $\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12} \\ f_{21}, & f_{22} \end{vmatrix} > 0$, ein Minimum, wenn $f_{11} > 0$ und $\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12} \\ f_{21}, & f_{22} \end{vmatrix} > 0$.

Sollten die Glieder zweiter Ordnung für $x = a$, $y = b$ ebenfalls verschwinden, so erfordert die Beantwortung der Frage nach dem Verhalten der Function in der Umgebung dieses Werthepaares in jedem besonderen Falle weitergehende Untersuchungen. Wenn jedoch aus der Aufgabestellung ohne Weiteres ersichtlich ist, dass in dem betrachteten

Gebiete nur ein Maximum oder nur ein Minimum existiren kann, so werden diese meist mühsamen Untersuchungen entbehrlich. Eine analoge Bemerkung gilt auch für das Folgende.

c) Explicite Functionen dreier Veränderlichen. Wenn für die Function $f(x, y, z)$ der drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z dieselben Voraussetzungen bestehen, wie für die Function $f(x, y)$ des vorhergehenden Falles, so liefert die Auflösung des Systems der drei Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ diejenigen Werthesysteme von x, y, z, welche der Function $f(x, y, z)$ ausgezeichnete Werthe ertheilen. Aus dem Vorzeichen, welches die Summe der Glieder zweiter Ordnung der vollständigen Aenderung von $f(x, y, z)$ in der Umgebung einer so bestimmten Werthegruppe x, y, z annimmt, kann im Allgemeinen entschieden werden, welcher Art der auftretende ausgezeichnete Werth der Function ist. Bei analoger Bezeichnung wie im vorhergehenden Falle lautet die vollständige Aenderung der Function unter der Voraussetzung, dass $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ sei:

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l) - f(x, y, z) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2 + 2f_{13}hl + 2f_{23}kl + f_{33}l^2) + R.$$

Setzt man zur Abkürzung die Functionaldeterminante $\begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, f_{13} \\ f_{21}, f_{22}, f_{23} \\ f_{31}, f_{32}, f_{33} \end{vmatrix} = \triangle$

und die Unterdeterminante $\begin{vmatrix} f_{11}, f_{12} \\ f_{21}, f_{22} \end{vmatrix} = \frac{\partial \triangle}{\partial f_{33}}$, so lassen sich die Glieder zweiter Ordnung als Summe der drei Quadrate darstellen

$$f_{11}\left(h + \frac{f_{12}}{f_{11}}k + \frac{f_{13}}{f_{11}}l\right)^2 + \frac{\frac{\partial \triangle}{\partial f_{33}}}{f_{11}}\left(k + \frac{f_{11}f_{23} - f_{13}f_{12}}{\frac{\partial \triangle}{\partial f_{33}}}l\right)^2 + \frac{\triangle}{\frac{\partial \triangle}{\partial f_{33}}}l^2.$$

Diese Summe kann, wie leicht zu zeigen, nur dann für beliebige h, k, l ein bestimmtes Zeichen haben, wenn den Coefficienten der drei Quadrate dasselbe Zeichen zukommt. Die Function $f(x, y, z)$ besitzt demnach für eine aus den Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ bestimmte Werthegruppe x, y, z ein Minimum, wenn die Functionaldeterminante

$\triangle > 0$, die Unterdeterminante $\frac{\partial \triangle}{\partial f_{33}} > 0$ und ihr Anfangsglied $f_{11} > 0$, ein Maximum, wenn $\triangle < 0$, $\frac{\partial \triangle}{\partial f_{33}} > 0$ und $f_{11} < 0$.

d) Implicite Functionen. Wenn eine implicite Function u von x durch die Gleichung $f(u, x) = 0$ gegeben ist, so muss für den Fall eines Maximums oder Minimums $\frac{du}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(u, x)}{\partial x}}{\frac{\partial f(u, x)}{\partial u}} = 0$ sein. Dieser Bedingung wird im Allgemeinen genügt, wenn $\frac{\partial f(u, x)}{\partial x} = 0$ ist. Eliminirt man aus dieser und der Gleichung $f(u, x) = 0$ die Grösse u, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung derjenigen Werthe von x, die zu einem Maximum oder Minimum von u gehören. Es tritt ein Maximum oder ein Minimum ein, je nachdem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ mit $\frac{\partial f}{\partial u}$ gleiches Zeichen hat oder nicht.

B. Relative Maxima und Minima.

Sei $f(x, y, z, t, \ldots)$ eine Function der $(m + n)$ Veränderlichen $x, y, z, t, \ldots,$ zwischen denen noch die m $(m < n)$ Gleichungen $\varphi_1(x, y, z, t, \ldots) = 0$, $\varphi_2(x, y, z, t, \ldots) = 0, \ldots . \varphi_m(x, y, z, t, \ldots) = 0$ bestehen mögen. Mit Hülfe dieser m Bedingungsgleichungen lässt sich die Function f im Allgemeinen auf eine Function F von n unabhängigen Veränderlichen zurückführen, für welche man nach den vorhergehenden Regeln die absoluten Maxima und Minima bestimmen kann. Die n Gleichungen, die man hierbei erhält, indem man die nach den n unabhängigen Veränderlichen genommenen partiellen Ableitungen von F gleich Null setzt, liefern in Verbindung mit den m Bedingungsgleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots$ $\varphi_m = 0$ ein System von $(m + n)$ Gleichungen, dessen Auflösung die Werthegruppen von $x, y, z, t, \ldots$ ergibt, welche die Function f zu einem relativen Maximum oder Minimum machen.

Dieses Verfahren führt jedoch meist auf wenig übersichtliche Resultate und ist in allen den Fällen unanwendbar, wo die angedeutete Elimination praktisch unmöglich ist.

Einfacher gelangt man zum Ziele, wenn man statt der Veränderlichen selbst ihre Differentiale eliminirt. In dem System von $(m+1)$ Gleichungen, das man erhält, wenn man die Differentiale der $(m+1)$ Functionen f, φ_1, φ_2, ... φ_m, genommen in Bezug auf alle darin vorkommenden Veränderlichen gleich Null setzt, treten nämlich die Differentiale dx, dy, ... linear auf, und man kann daher im Allgemeinen m dieser Differentiale eliminiren. Hierdurch erhält man eine Gleichung, in welche nur n der Differentiale eingehen, die nun als von einander unabhängig zu betrachten sind. Setzt man die Coefficienten dieser Differentiale einzeln gleich Null, so erhält man n Gleichungen, welche, zusammengenommen mit den m Bedingungsgleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ... $\varphi_m = 0$ im Allgemeinen die Bestimmung der Werthegruppen $x, y, z, t, \ldots$ gestatten, für welche die Function f Maximal- oder Minimalwerthe erreicht.

In den meisten Fällen ist jedoch die Methode der sogenannten unbestimmten Multiplicatoren dem soeben besprochenen Verfahren vorzuziehen. Diese Methode besteht darin, dass man nach Multiplication einer jeden der Functionen φ_1, φ_2, ... φ_m mit einem unbestimmten, constanten Factor $\lambda, \mu, \nu, \ldots \pi$ der Function f die Function $F = f(x, y, z, t, \ldots) - \lambda\varphi_1 - \mu\varphi_2 - \nu\varphi_2 - \cdots - \pi\varphi_m$ substituirt, hierauf sämmtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Function, genommen in Bezug auf die als von einander unabhängig betrachteten Variablen $x, y, z, t \ldots$ gleich Null setzt und die m unbestimmten Multiplicatoren $\lambda, \mu, \nu, \ldots \pi$ so bestimmt, dass die m Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ... $\varphi_m = 0$ erfüllt sind. Hiernach wird die Aufsuchung der relativen Maxima und Minima der Function f zurückgeführt auf die Bestimmung der absoluten Maxima und Minima der Function F. Die $(m+n)$ Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \cdots - \pi \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \cdots - \pi \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} = 0,$$

. . . .

etc.

in Verbindung mit den m Bedingungsgleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ... $\varphi_m = 0$

reichen im Allgemeinen hin zur Bestimmung der $(2m+n)$ Grössen $x, y, z, t, \dots \lambda, \mu, \nu, \dots \pi$, für welche die Function f Maximal- oder Minimalwerthe erlangt.

In vielen Fällen wird es sich hierbei empfehlen, die Multiplicatoren so lange als möglich in der Rechnung beizubehalten, für dieselben besondere Gleichungen aufzustellen, welche sie allein enthalten und die Unbekannten $x, y, z, t, \dots$ durch diese Multiplicatoren auszudrücken. Häufig führt auch die Interpretation der Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ etc. zu übersichtlicheren Resultaten, als die wirkliche Ausrechnung aller Grössen $x, y, z, t, \dots \lambda, \mu, \nu, \dots \pi$.

Anmerkung 1. Methoden zur Entscheidung, ob in einem gegebenen Falle ein relatives Maximum oder Minimum oder keines von beiden auftritt, findet man in der Abhandlung von Richelot: Bemerkungen zur Theorie der Maxima und Minima. Astronomische Nachrichten von Schumacher, Bd. 48, Seite 274—286.

Anmerkung 2. Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass bei denjenigen unter den folgenden Aufgaben, welche sich dazu eignen, die Anfertigung einer mehr oder weniger sorgfältigen Skizze sehr dazu beitragen wird, den Zusammenhang der in Betracht gezogenen Grössen besser zu übersehen.

§. 21. Beispiele.

1) $u = ax - x^2$; für $x = \frac{1}{2}a$, wird $u = \frac{1}{4}a^2$ ein Maximum.

2) $u = 2x + 3\sqrt[3]{(a-x)^2}$; für $x = a-1$, wird $u = 2a+1$ ein Max.

3) $u = x(a-x)^2$; für $x = \frac{1}{3}a$, wird $u = \frac{4a^3}{27}$ ein Max.
„ $x = a$, wird $u = 0$ ein Min.

4) $u = x^4 - 8ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 12a^4$;
für $x = a$, wird $u = 3a^4$ ein Min.,
„ $x = 2a$, „ $u = 4a^4$ „ Max.,
„ $x = 3a$, „ $u = 3a^4$ „ Min.

5) $u = m + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(2ax-x^2)^4}$; für $x = 0$, wird $u = m$ ein Min.,
„ $x = a$, „ $u = m + \frac{3}{2}a^2\sqrt[3]{a^2}$ „ Max.,
„ $x = 2a$, „ $u = m$ „ Min.

6) $u = \frac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$;

$\frac{du}{dx} = \frac{1+4x^2-4x^4-x^6}{(x^4-x^2+1)^2} = 0, \quad x = \pm 1.$

Operiren wir zur Bestimmung des Zeichens von $\frac{d^2u}{dx^2}$ wie §. 20. a. Anm. 1. angegeben, so ergibt sich $\frac{8x-16x^3-6x^5}{(x^4-x^2+1)^2}$, welches für $x = +1$ negativ und für $x = -1$ positiv wird.

Durch Substitution in die oberste Gleichung finden wir, dass für

$x = +1, \quad u = +2$ ein Max.,

$x = -1, \quad u = -2$ ein Min.

7) $u = \frac{x^3-x}{x^4-x^2+1}$;

$\frac{du}{dx} = \frac{2x^4+2x^2-x^6-1}{(x^4-x^2+1)^2} = 0,$

$x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad x''' = -\frac{1+\sqrt{5}}{2},$

$x^{IV} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$

Verfahren wir, wie in der vorigen Aufgabe, so finden wir, dass das Zeichen von $\frac{d^2u}{dx^2}$ abhängt von $4x^3+2x-3x^5$.

Dieser Ausdruck wird negativ für x' und x'', positiv für x''' und x^{IV}. Es wird demnach $u = -\frac{1}{2}$ ein Minimum für x''', $u = +\frac{1}{2}$ ein Maximum für x'', $u = -\frac{1}{2}$ ein Minimum für x^{IV} und endlich $u = +\frac{1}{2}$ ein Maximum für x'.

8) $u = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$; für $x = 0$ wird $u = 6\frac{3}{4}$ ein Min.

„ $x = -3$, „ $u = 0$ weder ein Min., noch ein Max.

9) $u = x\sqrt{ax-x^2}$; für $x = \frac{3}{4}a$, wird $u = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$ ein Max.

10) $u = x^2\sqrt{4a^2-x^2}$; für $x = \pm 2a\sqrt{\frac{2}{3}}$, wird $u = \frac{16}{3}a^3\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Max.,

„ $x = 0$, „ $u = 0$ „ Min.

11) $u = \frac{\sqrt{(a^4+x^4)^3}}{2a^2x^3}$; für $x = a$, wird $u = a\sqrt{2}$ ein Min.,
„ $x = -a$, „ $u = -a\sqrt{2}$ „ Max.

12) $u = a(x-b)^4$; für $x = b$, wird $u = 0$ ein Min., wenn $a > 0$, ein Maximum, wenn $a < 0$.

13) $u = x^5 - 5ax^4 + 5a^2x^3 + a^5$;
für $x = a$, wird $u = 2a^5$ ein Max.,
„ $x = 3a$, „ $u = -26a^5$ ein Min.,
„ $x = 0$, „ $u = a^5$ weder ein Min., noch ein Max.

14) $u = (x-1)(2-x)^2$; für $x = 2$, wird $u = 0$ ein Min.,
„ $x = \frac{4}{3}$, „ $u = \frac{4}{27}$ „ Max.

15) $u = x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 8x^2 - 16x + 16$; für $x = 2$, $u = 0$ Min., für $x = -\frac{2}{5}$, $u = \frac{62208}{3125}$ Max.

16) $au^3 - u^2x^2 + x^4 = 0$; für $x = \pm 2a\sqrt{2}$, wird $u = 4a$ ein Min.

17) $u^2 - 2mxu + x^2 - a^2 = 0$;

$$\text{für } x = \pm\frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}, \text{ wird } u = \pm\frac{a}{\sqrt{1-m^2}} \text{ ein } \begin{cases}\text{Max.}\\ \text{Min.}\end{cases}$$

18) $u = x^x$; für $x = \frac{1}{e}$, wird $u = \sqrt[e]{e^{-1}}$ ein Min.

19) $u = e^x.\cos 2x$; für $x = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$, wird $u = \frac{2}{5}\sqrt{5}\,e^{\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{2}}$ ein Max.

20) $u^4 - 4a^2ux + x^4 = 0$; $x = \pm a\sqrt[8]{3}$, $u = \pm a\sqrt[8]{27}$ Max. o. Min.

21) $u = x^6 - 6x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 12x + 4$; für $x = -2$, wird $u = 0$ ein Min., $x = -1$, $u = 16$ ein Max., $x = 1$, $u = 0$ ein Min.

22) $u = x^8 + \frac{1}{7}x^7 - 4x^6 - \frac{3}{5}x^5 + 6x^4 + x^3 - 4x^2 - x$; für $x = -1$, wird u ein Min., für $x = -\frac{1}{8}$ ein Max., für $x = +1$ ein Min.

23) $u = \frac{1}{7}x^7 - \frac{8}{5}x^5 + \frac{19}{3}x^3 - 12x$; für $x = -2$, -1 und $+\sqrt{3}$ wird u ein Max., für $x = -\sqrt{3}$, $+1$ und $+2$ ein Min.

24) $u^3 - 3aux + x^3 = 0$. Ist $a > 0$, so ist 1) für $x = a\sqrt[3]{2}$, u ein Max. $= a\sqrt[3]{4}$, 2) für $x = 0$, u ein Minimum $= 0$.

25) $u = \left(\frac{a}{x}\right)^x$; für $x = \frac{a}{e}$ wird $u = \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^a$ ein Min. oder Max., je nachdem $a \lesseqgtr 0$.

26a) $Au^2 + 2Bxu + Cx^2 + 2Du + 2Ex + F = 0$;

für $x = -\frac{BD-AE}{B^2-AC} \pm \frac{B}{B^2-AC}\sqrt{\frac{(BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)}{AC}}$

wird $u = \frac{CD-BE}{B^2-AC} \mp \frac{C}{B^2-AC}\sqrt{\frac{(BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)}{AC}}$

respective für das obere Zeichen ein Max., für das untere ein Min.

26b) $u = x^3+x+1$. Es gibt keinen Werth für x, der u zu einem Maximum oder Minimum macht.

26c) $u = x^3+ax^2+bx+c$. Für $x = -\frac{1}{3}a \mp \sqrt{\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{3}b}$ wird $u = \frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c \mp \frac{2}{3}b\sqrt{\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{3}b}$ zu einem Maximum oder Minimum, wenn $a^2 > 3b$ ist; ist dagegen $a^2 = 3b$, so tritt für $x = -\frac{a}{3}$ weder ein Max., noch ein Min. ein.

26d) $u = 4x^5+5x^4-60x^3+110x^2-80x+1$; für $x = 1$ wird u ein Minimum, für $x = -4$ ein Maximum.

26e) $u = (x-\alpha)^4(x-\beta)^5$; für $x = \alpha$, wird $u = 0$ ein Max. oder Min., je nachdem $\alpha \lesseqgtr \beta$; für $x = \beta$ gibt es weder ein Max. noch ein Min.; für $x = \frac{1}{9}(5\alpha+4\beta)$ endlich wird $u = 4^4.5^5\left(\frac{\alpha-\beta}{9}\right)^9$ ein Min. oder Max., je nachdem $\alpha \lesseqgtr \beta$ ist.

27a) $u = \frac{x}{lx}$; für $x = e$, wird $u = e$ ein Min.

27b) $u = \sqrt[x]{lx}$; für $x = 5{,}831\ldots$, wird $u = \sqrt[5{,}831]{1{,}7632\ldots} = 1{,}102\ldots$ ein Max.

28) $u = \sin^m x . \sin^n(a-x)$; für $x = \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}.\arcsin\left(\frac{m-n}{m+n}\sin a\right)$ wird u ein Max.

29) $u = \sin x . \cos 2x$; für $x = (2h+\frac{1}{2})\pi$, wird $u = -1$ ein Min.*),
„ $x = (2h-\frac{1}{2})\pi$, „ $u = +1$ ein Max.,
für $x = 2h\pi + \arcsin\sqrt{\frac{1}{6}}$, „ $u = \frac{1}{9}\sqrt{6}$ ein Max.,
„ $x = 2h\pi - \arcsin\sqrt{\frac{1}{6}}$, „ $u = -\frac{1}{9}\sqrt{6}$ ein Min.

30) $u = \sin nx . \sin^n(\alpha+x)$; unter der Voraussetzung, dass $\alpha < \pi$ ist, wird für $x = \frac{\pi-\alpha}{n+1}$, $u = \sin\frac{n}{n+1}(\pi-\alpha)\left(\sin\frac{\pi+n\alpha}{n+1}\right)^n$ ein Max.

---

*) Hier und in dem Folgenden bedeutet h eine beliebige ganze Zahl.

31a) $u = \cos x . \sin^2 x$; für $x = h\pi$, wird $u = 0$ und zwar ein Min., wenn h grade, und ein Max., wenn h ungrade ist; für $x = \pm \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$, wird $u = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Max.

31b) $u = \sin x . \cos(\alpha - x)$; für $x = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}(2h+1)\pi$, wird $u = \frac{1}{2}.[\sin\alpha + (-1)^h]$ ein Max., wenn h grade, und ein Min., wenn h ungrade ist.

32a) $u = e^x . \sin(x - \alpha)$; für $x = \alpha + (h + \frac{3}{4})\pi$, wird, je nachdem h grade oder ungrade ist, $u = (-1)^h . \sqrt{\frac{1}{2}} . e^{\alpha + (h + \frac{3}{4})\pi}$ ein Max. oder Min.

32b) $u = \dfrac{e^x}{\sin(x - \alpha)}$; für $x = \alpha + (h + \frac{1}{4})\pi$, wird, je nachdem h grade oder ungrade ist, $u = (-1)^h \sqrt{2} . e^{\alpha + (h + \frac{1}{4})\pi}$ ein Min. oder Max.

33a) $u = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$. Für $x = 0$ und allgemein $x = 2h\pi$ wird $u = 3$ ein Max.; für $x = \pi$ und allgemein $x = (2h+1)\pi$ wird $u = -1$ ein Min.; für $x = 2h\pi + \arccos\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{6}$ wird $u = \dfrac{-17 \mp 7\sqrt{7}}{27}$ ein $\begin{cases}\text{Min.,}\\ \text{Max.}\end{cases}$

33b) $u = \mathrm{tg}^m x . \mathrm{tg}^n(\alpha - x)$; für $x = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{m-n}{m+n}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)$, wird u ein Max.

34a) Aufg. Es seien gegeben die Gleichungen

$$a^2 + b^2 - x^2 - y^2 + 2ax + 2by - 2z = 0,$$
$$a^2x^2 - b^2y^2 - 2a^3x + 2b^3y + (a^2 - b^2)z = 0;$$

es soll das Maximum für z gefunden werden.

Lös. z wird ein Max. $= a^2 + b^2$ für $x = a$, $y = b$.

34b) Aufg. Das Maximum oder Minimum von z zu bestimmen, wenn

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 - 2z = 0,$$
$$16x^2 - 9y^2 - 96x + 72y - 7z = 0.$$

Lös. Für $x = 3$, $y = 4$ wird $z = 0$ zu einem Minimum.

35a) Aufg. Für welche Werthe von x und y wird

$$u = x^2 + xy + y^2 - mx - ny$$ zu einem Max. oder Min.?

Lös. Für $x = \frac{1}{3}(2m - n)$, $y = \frac{1}{3}(2n - m)$ wird $u = -\frac{1}{3}(m^2 - mn + n^2)$ ein Min.

35b) **Aufg.** Für welche Werthe von x und y wird

$u = a^2x^2 + 2bxy + c^2y^2 - ex - gy$ zu einem Max. oder Min.?

Lös. Für $x = \frac{c^2e - bg}{2(a^2c^2 - b^2)}$, $y = \frac{a^2g - be}{2(a^2c^2 - b^2)}$ wird, wenn $a^2c^2 > b^2$ ist, u zu einem Min.

35c) **Aufg.** Für welche Werthe von x, y, z wird

$u = \sin x \sin y \sin z$ ein Maximum, wenn $x + y + z = \pi$?

Lös. Es wird $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} y = \operatorname{cotg} z$ oder $x = y = z = \frac{\pi}{3}$, und daher ist das Maximum von $u = \frac{3}{8}\sqrt{3}$.

36a) **Aufg.** Für welche Werthe von x und y wird

$u = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$ ein Max. oder Min.?

Lös. Für $x = 21$, $y = 20$ wird $u = 282$ ein Max.

36b) **Aufg.** Man bestimme den grössten und kleinsten Werth, welchen die Function $f = x^2 + 4y^2 + 3z^2$ annehmen kann, wenn zwischen den Veränderlichen x, y, z die Gleichungen

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0 \text{ und}$$
$$\psi = x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{3}z = 0 \text{ bestehen.}$$

Lös. Führt man die unbestimmten Multiplicatoren λ und 2μ ein, so hat man das absolute Maximum und Minimum der Function $F = f - \lambda\varphi - 2\mu\psi$ aufzusuchen. Die Werthe der unbekannten Grössen x, y, z, λ und μ bestimmen sich aus den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, $\varphi = 0$ und $\psi = 0$. Es ergibt sich

$$\lambda_1 = \tfrac{25}{7},\ \lambda_2 = \tfrac{19}{7};\ \mu_1 = \pm\tfrac{36}{7},\ \mu_2 = \pm\tfrac{36}{7};$$
$$x_1 = -x_2 = -2,\ y_1 = -y_2 = 6,\ z_1 = -z_2 = -3,$$
$$x_3 = -x_4 = -3,\ y_3 = -y_4 = 2,\ z_3 = -z_4 = 6;$$

das Maximum von $f = 49\lambda_1 = 175$, das Minimum $= 49\lambda_2 = 133$.

36c) **Aufg.** Man führe die analogen Rechnungen durch für die Function

$$f = x^2 - y^2, \text{ wenn}$$
$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \text{ und}$$
$$\psi = x + y + \tfrac{1}{2}z = 0.$$

Lös. $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$; $\mu_1 = \pm\frac{4}{3}$, $\mu_2 = \pm\frac{4}{3}$;

$x_1 = -x_2 = 2$, $y_1 = -y_2 = -1$, $z_1 = -z_2 = -2$,

$x_3 = -x_4 = 1$, $y_3 = -y_4 = -2$, $z_3 = -z_4 = 2$;

Max. von $f = 9\lambda_1 = 3$, Min. von $f = 9\lambda_2 = -3$.

36d) Aufg. Man löse dieselbe Aufgabe für

$$f = 2y^2 + z^2, \text{ wenn}$$
$$\varphi = x^2+y^2+z^2-9 = 0 \text{ und}$$
$$\psi = x + y - \tfrac{1}{2}z = 0.$$

Lös. $\lambda_1 = \frac{4}{3}$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$; $\mu_1 = \pm\frac{4}{3}$, $\mu_2 = \pm\frac{4}{3}$;

$x_1 = -x_2 = -1$, $y_1 = -y_2 = 2$, $z_1 = -z_2 = 2$,

$x_3 = -x_4 = -2$, $y_3 = -y_4 = 1$, $z_3 = -z_4 = -2$;

Max. von $f = 9\lambda_1 = 12$, Min. von $f = 9\lambda_2 = 6$.

37) Aufg. Eine gerade Linie a in zwei solche Theile zu theilen, dass das Rechteck aus beiden Theilen ein Max. sei.

Lös. Die Linie muss halbirt werden.

38) Aufg. Aus zwei gegebenen Seiten das grösstmögliche Dreieck zu bilden.

Lös. Der eingeschlossene Winkel muss ein Rechter sein.

39) Aufg. Unter allen Dreiecken, die auf einerlei Grundlinie g stehen und gleichen Umfang u haben, das an Flächeninhalt grösste zu finden.

Lös. Sei x die zweite Seite des Dreiecks, so ist bekanntlich der Inhalt desselben:

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{u(u-2g)(u-2x)(2g+2x-u)}\,.$$

I wird ein Maximum, wenn $(u-2x)(2g+2x-u)$ ein Maximum wird. Hieraus ergibt sich als Resultat, dass der Inhalt ein Maximum wird, wenn man über g ein gleichschenkliges Dreieck mit $\frac{1}{2}(u-g)$ beschreibt.

40) Aufg. Unter allen Dreiecken, welche eine Seite s und den Gegenwinkel α gleich haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Inhalt hat.

Lös. Bezeichnet x den zweiten Winkel, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$I = \frac{s^2}{2\sin\alpha}\cdot\sin x\,.\sin(\alpha+x) = \text{Max.}$$

Hieraus $x = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$. Jeder der Seite s anliegende Winkel ist also $= R - \frac{1}{2}\alpha$.

41) **Aufg.** Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel α und die Summe der einschliessenden Seiten $= 2s$ haben, das grösste zu finden.

Lös. Jede der beiden einschliessenden Seiten ist $= s$.

42) **Aufg.** In den Seiten eines gegebenen gleichseitigen Dreiecks drei solche Punkte zu finden, dass die Verbindungslinien derselben wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden und zwar das kleinstmögliche.

Lös. Das neue Dreieck wird ein Min., wenn die Summe der übrigen drei Dreiecke ein Max. wird. Diese stehen aber der Anforderung gemäss auf gleichen Grundlinien (den Seiten des neuen Dreiecks) und haben denselben Gegenwinkel $= \frac{2}{3}R$, also ist jedes nach Aufg. 40 ein Max., wenn jeder an der Grundlinie liegende Winkel $1R - \frac{1}{3}R = \frac{2}{3}R$ wird, d. h. wenn auch sie gleichseitig sind.

Es entsteht also das kleinstmögliche Dreieck durch die Verbindung der Mitten der Seiten.

43) **Aufg.** Unter allen Parallelogrammen mit einem gegebenen Winkel, die man in ein gegebenes Dreieck so einschreiben kann, dass eine Seite des Parallelogramms in eine Seite des Dreiecks und die beiden andern Ecken des Parallelogramms in die beiden andern Seiten des Dreiecks fallen, das grösste zu finden.

Lös. Wenn a die Grundlinie, h die Höhe des Dreiecks, x die Grundlinie des Parallelogramms (ein Theil von a), so ist die Höhe des letzteren $\frac{h(a-x)}{a}$ und sein Inhalt

$$u = \frac{h(a-x)}{a}x \text{ wird ein Max. mit } (a-x)x,$$

wenn $x = \frac{1}{2}a$.

Das Parallelogramm wird mithin ein Max., wenn seine Grundlinie die Hälfte der Grundlinie des Dreiecks und seine Höhe gleich der halben Dreieckshöhe ist.

44) **Aufg.** Das grösstmögliche Dreieck mit einem gegebenen Winkel in ein gegebenes Dreieck so einzutragen, dass eine Seite des ersten parallel mit einer Seite des letzteren geht.

Lös. Der Inhalt des verlangten Dreiecks ist offenbar die Hälfte des in der vorigen Aufgabe erwähnten Parallelogramms; die Bedingungen für die Maxima beider Figuren sind also dieselben, und man zieht daher in der halben Höhe des Dreiecks eine Parallele mit der Grundlinie und beschreibt über dieser Parallelen ein Dreieck, welches den gegebenen Winkel entweder als anliegenden oder gegenüberliegenden enthält, und dessen dritte Ecke in der Grundlinie liegt.

45) **Aufg.** In dem einen Schenkel eines gegebenen Winkels C sind zwei Punkte A und B durch ihre Entfernungen a und b von dem Scheitel des Winkels gegeben; man soll in dem andern Schenkel einen solchen Punkt D finden, dass die von ihm nach den beiden gegebenen Punkten A und B gezogenen Linien den grösstmöglichen Winkel ADB einschliessen.

Lös. Bezeichnet man CD mit x, so ist: $\operatorname{tang} CDA = \frac{a \sin C}{x - a \cos C}$,

$\operatorname{tang} CDB = \frac{b \sin C}{x - b \cos C}$, $\angle ADB = CDB - CDA = \text{Max.}$,

$\operatorname{tang} ADB = \frac{(a-b) x \sin C}{x^2 - (a+b) x \cos C + ab}$,

$\frac{x}{x^2 - (a+b) x \cos C + ab} = \text{Max.} = f(x)$, $f'(x) = 0$, wenn $x = \sqrt{ab}$, $f''(x)$ wird negativ. Der Winkel wird also ein Max., wenn die Entfernung des gesuchten Punktes von dem Scheitel des gegebenen Winkels die mittlere Proportionale zwischen a und b ist.

Leicht kann geometrisch nachgewiesen werden, dass der Punkt D der Berührungspunkt eines durch die Punkte A und B gehenden und den zweiten Schenkel des gegebenen Winkels berührenden Kreises sein muss. Entsprechend den beiden Vorzeichen von $\sqrt{ab}$ gibt es zwei solcher Kreise, deren Berührungspunkte zu verschiedenen Seiten des Punktes C liegen.

46) Aufg. Wenn in einer von zwei parallelen Linien zwei Punkte A und B in einer Distanz $= d$ gegeben sind, so soll man in der andern Parallelen einen solchen Punkt C finden, dass die von ihm nach den beiden ersten Punkten gezogenen Geraden den grösstmöglichen Winkel einschliessen.

Lös. Sei a das Perpendikel vom Scheitelpunkte C des Winkels (y) auf die Gerade AB, x der Abstand des Fusspunktes dieses Perpendikels von dem gegebenen Punkte A, so ist

$$\operatorname{tang} y = \frac{ad}{a^2 - dx + x^2}.$$

Der Winkel y wird ein Max., wenn $x = \frac{1}{2}d$ ist. Man errichtet daher in der Mitte von AB ein Perpendikel auf AB; der Durchschnittspunkt mit der andern Parallelen ist der gesuchte.

47) Aufg. Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel $= 2\alpha$ und denselben Umfang $= 2s$ haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Inhalt hat.

Lös. Bezeichnen A, B, C die Winkel, a, b, c die gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks ABC, so wird dessen Inhalt u ausgedrückt durch die Formel

$$u = s^2 \operatorname{tang}\frac{A}{2} \operatorname{tang}\frac{B}{2} \operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

Bezeichnet man mit $2x$ den zweiten Winkel des Dreiecks, so ist $u = s^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} x \operatorname{cotg}(\alpha + x)$.

Dies wird ein Max., wenn

$$\frac{\sin 2(\alpha + x) - \sin 2x}{2\cos^2 x \sin^2(\alpha + x)} = 0 \text{ und}$$

$$\cos 2(\alpha + x) - \cos 2x \text{ negativ wird.}$$

Hieraus erhält man $2x = R - \alpha$; also wird auch der dritte Winkel $= R - \alpha$ und jede der den Winkel 2α einschliessenden Seiten $= \frac{s}{1 + \sin\alpha}$, die gegenüberliegende Seite $= \frac{2s . \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$.

48) Aufg. Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel $= 2\alpha$ und denselben Flächeninhalt $= u^2$ haben, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Lös. Wenn die Bezeichnungen dieselben bleiben, wie in der vorigen Aufgabe, so haben wir

$$s^2 = \frac{u^2}{\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}x \,.\, \operatorname{cotg}(\alpha + x)}.$$

Die Grösse s wird ein Min., wenn $x = \frac{1}{2}(R - \alpha)$ wird. Jede der den Winkel 2α einschliessenden Seiten ist $= u\sqrt{2 \operatorname{cosec} 2\alpha}$ und die gegenüberliegende Seite $= 2u\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$.

49) Aufg. Unter allen Dreiecken, welche ein Höhenperpendikel $= h$ und denselben Umfang $= 2s$ haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Flächeninhalt hat.

Lös. Bezeichnen wir mit y die zu h gehörige und mit x eine anliegende Seite, mit u den Flächeninhalt, so ist

$$u^2 = \frac{y^2h^2}{4} = s(s-y)(s-x)(y+x-s) \ldots (1)$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass u offenbar ein Max., wenn y ein Max., aus der zweiten, wenn $(s-y)(s-x)(y+x-s) = \varphi(x,y)$ gesetzt wird,

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{(s-y)(2s-2x-y)}{(s-x)(2y-2s+x)}$$

$$= 0, \text{ wenn } y = 2(s-x) \ldots\ldots (2)$$

Diesen Werth für y in (1) gesetzt, erhalten wir

$$(s-x)^2h^2 - s(s-x)^2(2x-s) = 0,$$

$$(s-x)^2(h^2 - 2xs + s^2) = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $x = \frac{h^2+s^2}{2s}$; hieraus folgt $y = \frac{s^2-h^2}{s}$. Aus (2) folgt aber, dass das Dreieck gleichschenklig ist.

50) Aufg. Unter allen Dreiecken, welche ein Höhenperpendikel $= h$ und denselben Flächeninhalt $= I$ haben, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Lös. Mit I und h ist auch die zu h gehörige Grundlinie $\frac{2I}{h} = a$ gegeben; bezeichnet nun y den halben Umfang und x eine zweite Seite des Dreiecks, so ist

$$I = \sqrt{y(y-a)(y-x)(a+x-y)} = \sqrt{\varphi(x,y)} \ldots (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0, \text{ wenn } y = x + \frac{a}{2} \cdots\cdots (2)$$

Führen wir (2) in (1) ein und quadriren, so erhalten wir

$$\frac{(4x^2 - a^2)\,a^2}{16} = I^2 = \frac{a^2h^2}{4},$$

$$x = \frac{1}{h} \cdot \sqrt{I^2 + h^4}.$$

Aus (2) folgt, dass $y = x + \frac{1}{2}a$, das Dreieck also gleichschenkelig ist über a.

Der Umfang wird also ein Minimum, wenn man über $\frac{2I}{h}$ mit $\frac{1}{h} \cdot \sqrt{I^2 + h^4}$ ein gleichschenkeliges Dreieck beschreibt.

51) Aufg. In einen gegebenen Kreis einen gegebenen Winkel so als Peripheriewinkel einzutragen, dass der von seinen Schenkeln und dem zwischenliegenden Bogen begrenzte Flächenraum ein Max. wird.

Lös. Mit gegebenem Kreise und gegebenem Peripheriewinkel sind Sehne und Bogen zu diesem Winkel constant. Der Werth des fraglichen Inhalts richtet sich daher nur nach dem Inhalt desjenigen Dreiecks, welches über der constanten Sehne beschrieben wird. Dasselbe wird aber nach Aufg. 40 ein Max., wenn es gleichschenkelig ist.

Der Winkel muss also so eingetragen werden, dass der nach seinem Scheitel gezogene Radius ihn halbirt.

52) Aufg. In einen gegebenen Kreis einen gegebenen Winkel so als Peripheriewinkel einzutragen, dass der Umfang der von seinen Schenkeln und dem zwischenliegenden Bogen begrenzten Fläche ein Max. werde.

Lös. Der Winkel muss so eingetragen werden, dass der nach seinem Scheitel gezogene Radius ihn halbirt.

53) Aufg. Unter allen Kreisausschnitten von gleichem Umfang $= 2s$ die bestimmenden Stücke desjenigen zu finden, welcher den grössten Flächeninhalt hat.

Lös. Der Radius des gesuchten Kreises ist $= \frac{s}{2}$, der zugehörige Bogen $= s$ und der Winkel am Mittelpunkte in Graden ausgedrückt $= \frac{360^0}{3,14159\ldots} = 114^0\,35'\,29'',61\ldots$

54) Aufg. Unter allen Kreisausschnitten von gleichem Flächeninhalt $= u^2$ denjenigen zu finden, der den kleinsten Umfang hat.

Lös. Der Radius des gesuchten Kreises ist $= u$, d. h. gleich der Seite eines Quadrats, welches den gegebenen Flächeninhalt angibt, und der Winkel am Mittelpunkte, in Graden ausgedrückt $= \frac{360^0}{3,14159\ldots} = 114^0\,35'\,29'',61\ldots$

55) Aufg. Unter allen Kreisabschnitten von gleichem Umfang $2s$ denjenigen zu finden, welcher den grössten Flächeninhalt hat.

Lös. Es ist ein ganzer Kreis mit dem Radius

$$= \frac{s}{3,14159\ldots} = s\,.\,0,318309\ldots.$$

56) Aufg. Unter allen Kreisabschnitten von gleichem Flächeninhalt $= u^2$ denjenigen zu finden, welcher den kleinsten Umfang hat.

Lös. Es ist ein ganzer Kreis mit dem Radius

$$= \frac{u}{\sqrt{3,14159\ldots}} = u\,.\,0,56418\ldots.$$

57) Aufg. Unter allen Dreiecken, die einen gegebenen Winkel enthalten und einem gegebenen Kreise mit dem Radius r umschrieben werden können, dasjenige zu finden, welches den grössten oder kleinsten Flächeninhalt hat.

Lös. Denkt man sich den gegebenen Winkel 2α durch zwei Tangenten an den gegebenen Kreis gebildet und nennt die Winkel, welche die dritte Tangente mit diesen zwei Tangenten einschliesst, resp. $2x$ und $2y$, so besteht zwischen x und y die Gleichung $x + y + \alpha - 90^0 = 0$, und es wird die Fläche I des Dreiecks, $I = r^2(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}x + \operatorname{cotg}y)$, ein Maximum, resp. Minimum für $x = y$. Zieht man daher eine gerade Linie von dem Scheitel des Winkels durch den Mittel-

punkt des Kreises, so sind die Durchschnittspunkte dieser Centrallinie mit der Peripherie die Berührungspunkte der dritten Seiten der beiden sich ergebenden Dreiecke. In dem einen Falle (Min.) wird der Kreis alle drei Seiten des Dreiecks auf der innern Seite berühren und liegt also ganz innerhalb des Dreiecks; in dem andern Falle aber (Max.) berührt er eine Seite von aussen und die beiden andern in ihren Verlängerungen.

58) Aufg. Unter denselben Bedingungen, wie in der vorigen Aufgabe, soll das Dreieck mit dem grössten oder kleinsten Umfang gefunden werden.

Lös. Es sind dieselben beiden Dreiecke wie vorhin.

59) Aufg. Unter allen Vierecken mit einem gegebenen Winkel 2α, die einem gegebenen Kreise mit dem Radius r umschrieben sind und zugleich der Bedingung genügen, dass um dieselben ein Kreis beschrieben werden kann, das grösste und kleinste zu finden.

Lös. Alle Vierecke, welche einem gegebenen Kreise umschrieben sind und um welche sich zugleich ein Kreis beschreiben lässt, sind theils solche, deren Fläche ganz ausserhalb der Fläche des gegebenen Kreises liegt, theils solche, welche den gegebenen Kreis ganz umschliessen. Unter den ersteren gibt es ein grösstes, unter den letzteren ein kleinstes. Denkt man sich den gegebenen Winkel 2α durch zwei Tangenten an den gegebenen Kreis gebildet, so erhält man das grösste Viereck, wenn man auf diesen Tangenten selbst von den Berührungspunkten an gerechnet rückwärts den Radius aufträgt und von diesen so erhaltenen Punkten zwei neue Tangenten an den Kreis zieht; und das zweite, das kleinste Viereck erhält man, wenn man auf denselben ersten Tangenten auf ihren Verlängerungen von den Berührungspunkten an den Radius aufträgt und von diesen so erhaltenen Punkten Tangenten an den Kreis zieht. Bei dem letzten Viereck berührt der Kreis

alle vier Seiten von innen, liegt also ganz innerhalb des Vierecks; bei dem ersten dagegen berührt er zwei Seiten von aussen und alle in ihren Verlängerungen. Bei dem grössten Viereck sind je zwei Seiten respective $r(\operatorname{cotg}\alpha - 1)$ und $r(\operatorname{tg}\alpha - 1)$, bei dem kleinsten dagegen $r(\operatorname{cotg}\alpha + 1)$ und $r(\operatorname{tg}\alpha + 1)$.

Für die Rechnung wird am besten die Hälfte eines der beiden nicht bekannten Winkel als unabhängige Variable eingeführt.

60) **Aufg.** Unter allen Vierecken, welche zwei gegebene Winkel enthalten und einem gegebenen Kreise mit dem Radius r so umschrieben sind, dass dieser ganz innerhalb liegt, das kleinste zu finden.

Lös. Erster Fall. Wenn die beiden gegebenen Winkel 2α und 2β an einer Seite liegen, dann ergibt sich zunächst die Gleichheit der beiden andern Winkel, und man erhält für die einzelnen Seiten folgende Ausdrücke:

die Seite, welche zwischen 2α und 2β liegt $= \dfrac{r.\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$,

die Seite, welche zunächst an 2β liegt $= \dfrac{r\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\beta}$,

„ „ „ „ „ 2α „ $= \dfrac{r\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\alpha}$,

„ „ „ der ersten gegenüber „ $= 2r\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

Zweiter Fall. Wenn die beiden gegebenen Winkel 2α und 2γ sich diagonal gegenüber liegen, so sind die beiden andern Winkel zunächst wieder einander gleich, und es werden die beiden Seiten, welche den Winkel 2α einschliessen,

$$= \frac{r\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} \text{ und die andern } = \frac{r\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\sin\gamma\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}.$$

In beiden Fällen empfiehlt es sich, die Hälfte eines der beiden nicht gegebenen Winkel als unabhängige Variable zu wählen.

61) **Aufg.** In einer Seite BC eines gegebenen Dreiecks ABC ist ein Punkt D gegeben; man soll von diesem nach zwei zu findenden Punkten E und F in den beiden andern Seiten AB und AC zwei Linien DE und DF, die einen gegebenen Winkel λ einschliessen, so ziehen, dass das hierdurch entstandene Dreieck seinem Inhalte nach ein Minimum wird.

Lös. Bezeichnet man die beiden Stücke BD und DC der Seite BC mit m und n, die Winkel BDE und FDC mit x und y, so ist der Inhalt des Dreiecks DEF durch $\frac{\frac{1}{2}mn \sin B \sin C \sin \lambda}{\sin(2R - x - B)\sin(x + \lambda - C)}$ gegeben, der ein Minimum wird, wenn der Nenner ein Maximum ist. Hierdurch erhält man $2R - 2x - B - \lambda + C = 0$, woraus $y - x = B - C$ folgt. Die Construction ist hiernach folgende: Man fälle von D auf die Seiten AB und AC Perpendikel DM, DN, halbire den Winkel MDN und trage zu beiden Seiten der Halbirungslinie DO gleiche Winkel ODE und $ODF = \frac{1}{2}\lambda$ ab, wodurch man das verlangte Dreieck DEF erhalten wird.

62) **Aufg.** In einer Ebene sind zwei parallele Linien gegeben, die von einer dritten unter rechten Winkeln geschnitten werden; ebenso ist ein Punkt in derselben Ebene gegeben. Es soll durch diesen eine solche die beiden Parallelen schneidende Gerade gezogen werden, dass das Product der Stücke, welche auf den Parallelen zwischen dieser neuen und der gegebenen schneidenden Linie liegen, ein Maximum sei.

Lös. Die Abstände des gegebenen Punktes von den beiden Parallelen seien m und n, $(m > n)$; der Abstand von der gegebenen schneidenden Linie sei h. Je nachdem der gegebene Punkt entweder innerhalb oder ausserhalb der Parallelen liegt, sind die verlangten Stücke $\frac{h(m \pm n)}{2m}$ und $\frac{h(m \pm n)}{2n}$. Im ersteren Falle werden die Stücke auf derselben Seite, im zweiten auf verschiedenen Seiten der gegebenen Schneidenden liegen, und es wird in beiden Fällen von derjenigen Paral-

lelen das grössere Stück abgeschnitten, von welcher der gegebene Punkt am weitesten entfernt ist.

.63) Aufg. Wenn Alles wie in der vorigen Aufgabe bleibt, so soll die gesuchte Linie so gezogen werden, dass die Summe der Quadrate der abgeschnittenen Stücke ein Minimum werde.

Lös. Die abgeschnittenen Stücke sind: $\frac{hm(m \pm n)}{m^2+n^2}$ und $\frac{hn(m \pm n)}{m^2+n^2}$. Die Lage der Stücke ist in Bezug auf die gegebene Schneidende dieselbe wie bei der vorigen Aufgabe; jedoch unterscheiden sich in beiden Fällen die gegenwärtigen Resultate von denen in der vorigen Aufgabe dadurch, dass hier auf derjenigen Parallelen das grössere Stück abgeschnitten wird, welcher der gegebene Punkt zunächst liegt.

64) Aufg. Unter den Vierecken, welche einen gegebenen Winkel 2α und einen gegebenen Umfang $2s$ haben und zugleich der Bedingung genügen, dass sowohl in als um dieselben ein Kreis beschrieben werden könne, das grösste zu finden.

Lös. Bezeichnet man die Winkel des gesuchten Vierecks mit 2α, 2β, 2γ, 2δ, den Radius des eingeschriebenen Kreises mit r, so hat man in Folge der Bedingungen der Aufgabe

$$\gamma = 90^0 - \alpha,\ \delta = 90^0 - \beta,\ r = \frac{s}{2} \cdot \frac{\sin 2\alpha \,.\, \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}.$$

Die Fläche des Vierecks $I = rs$ wird also ein Maximum für denjenigen Werth der unabhängigen Veränderlichen β, für welchen die Function $\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$ einen grössten Werth annimmt.

Jede der beiden Seiten, die den Winkel 2α einschliessen, ist $= \frac{s}{1+\operatorname{tg}\alpha}$, und jede der beiden andern Seiten $= \frac{s}{1+\operatorname{cotg}\alpha}$.

Zieht man die Diagonale durch die Spitze des Winkels 2α, so entsteht auf jeder Seite dieser Diagonale ein rechtwinkeliges Dreieck.

65) Aufg. Unter allen Vierecken, welche zwei gegebene Diagonalen p und q haben und einem gegebenen Kreise mit dem Radius r eingeschrieben werden können, das grösste zu finden.

Lös. Zuerst ergibt sich leicht, dass die beiden Diagonalen auf einander senkrecht stehen müssen. Nennt man ferner 2α einen Viereckswinkel, welcher der Diagonale p gegenübersteht und 2β den Winkel, der q gegenübersteht, so dass $\sin 2\alpha = \frac{p}{2r}$ und $\sin 2\beta = \frac{q}{2r}$, dann ergeben sich folgende Ausdrücke für die Seiten des Vierecks:

die zwischen 2α und 2β liegende $= 2r.\cos(\alpha + \beta - \frac{1}{2}R)$,
„ zunächst an 2β „ $= 2r.\sin(\alpha - \beta + \frac{1}{2}R)$,
„ „ „ 2α „ $= 2r.\sin(\beta - \alpha + \frac{1}{2}R)$,
„ der ersten gegenüberliegende $= 2r.\sin(\alpha + \beta - \frac{1}{2}R)$.

Anm. Noch symmetrischer werden diese Ausdrücke, wenn man die Winkel des Vierecks der Reihe nach 2α, 2β, 2γ, 2δ nennt, wo also $2\gamma = 2R - 2\alpha$ und $2\delta = 2R - 2\beta$ ist. Man erhält dann die Seite,

welche zwischen 2α und 2β liegt $= 2r.\cos(\alpha + \beta - \frac{1}{2}R)$,
„ „ 2β „ 2γ „ $= 2r.\cos(\beta + \gamma - \frac{1}{2}R)$,
„ „ 2γ „ 2δ „ $= 2r.\cos(\gamma + \delta - \frac{1}{2}R)$,
„ „ 2δ „ 2α „ $= 2r.\cos(\delta + \alpha - \frac{1}{2}R)$.

66) Aufg. Unter allen Vierecken, welche dieselben Winkel 2α, 2β, 2γ, 2δ und denselben Umfang $2s$ haben, das grösste oder kleinste zu finden.

Lös. Bezeichnet man die Eckpunkte des gesuchten Vierecks mit A, B, C, D und zwar so, dass AB und BC den Winkel 2β, BC und CD den Winkel 2γ u. s. w. einschliessen und setzt $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$, $DA = t$, so hat man die Function $xy \sin B + zt \sin D$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, während zwischen den Veränderlichen x, y, z, t die Bedingungsgleichungen

$$x - y\cos B + z\cos(A + D) - t\cos A = 0,$$
$$y\sin B + z\sin(A + D) - t\sin A = 0,$$
$$x + y + z + t = 2s$$

bestehen. Wird noch die Grösse $x - y + z - t = 2u$ gesetzt

und u als unabhängige Veränderliche betrachtet, so findet man nach einiger Rechnung $u = 0$ als Bedingung für das Auftreten eines Maximums oder Minimums. Das verlangte Viereck muss daher einem Kreise umschrieben werden können.

Anmerkung 1. Einen einfachen geometrischen Beweis dieses Satzes hat Steiner gegeben im Art. 43 der Abhandlung: Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan etc. Crelle's Journal, Bd. XXIV.

Wenn alle Ecken des Vierecks ausspringende sind, wenn also jeder Winkel kleiner als $2R$ ist, so geben die folgenden Ausdrücke der Seiten ein Max., springt aber eine der Ecken ein (mehr als eine Ecke kann aber bekanntlich nicht einspringen), so geben dieselben Werthe ein Minimum. Es werden nun die Seiten, welche zwischen

$$2\alpha \text{ u. } 2\beta \text{ liegen} = \frac{s \cdot \sin\gamma \cdot \sin\delta}{\sqrt{\sin(\alpha+\gamma) \cdot \sin(\alpha+\delta) \cdot \sin(\beta+\gamma) \cdot \sin(\beta+\delta)}},$$

$$2\beta \text{ u. } 2\gamma \quad \text{,,} \quad = \frac{s \cdot \sin\delta \cdot \sin\alpha}{\sqrt{\sin(\beta+\delta) \cdot \sin(\beta+\alpha) \cdot \sin(\gamma+\delta) \cdot \sin(\gamma+\alpha)}},$$

$$2\gamma \text{ u. } 2\delta \quad \text{,,} \quad = \frac{s \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sqrt{\sin(\gamma+\alpha) \cdot \sin(\gamma+\beta) \cdot \sin(\delta+\alpha) \cdot \sin(\delta+\beta)}},$$

$$2\delta \text{ u. } 2\alpha \quad \text{,,} \quad = \frac{s \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sqrt{\sin(\delta+\beta) \cdot \sin(\delta+\gamma) \cdot \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha+\gamma)}}.$$

Anm. 2. Diese Ausdrücke können einfacher und zwar mit rationalen Nennern dargestellt werden, verlieren aber dann die Symmetrie, welche jetzt, wenn man auf die jeder Seite anliegenden und gegenüberliegenden Winkel achtet, leicht zu erkennen ist.

67a) Aufg. Unter allen Paralleltrapezen, in welchen eine der parallelen Seiten gegeben ist und welche einem gegebenen Kreise mit dem Radius r eingeschrieben werden können, die grössten zu finden.

Lös. Denkt man sich die gegebene Seite a als Sehne in den gegebenen Kreis eingetragen, so gibt es, wenn man nur positive

Flächen zulässt, in jedem der entstehenden Kreisabschnitte ein grösstes Paralleltrapez, welches erhalten wird, wenn man den zugehörigen Bogen in drei gleiche Theile theilt und die Theilpunkte durch Gerade verbindet. Nennt man den der Sehne a entsprechenden Centriwinkel 2α, ist also $a = 2r \sin \alpha$, so wird jede der drei andern Seiten im grösseren Kreisabschnitt $= 2r \sin \frac{1}{3}(\pi - \alpha)$ und im kleineren $= 2r \sin \frac{1}{3}\alpha$. Die Höhe des ersten Trapezes ist $= 2r \cos(\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}\alpha) \cos(\frac{1}{6}\pi - \frac{2}{3}\alpha)$ und die des zweiten $= 2r \,.\, \sin \frac{1}{3}\alpha \sin \frac{2}{3}\alpha$.

Für die Rechnung ist es zweckmässig, den Centriwinkel $= 2x$, welcher zu der Sehne gehört, die der gegebenen Sehne a parallel ist, als unabhängige Variable einzuführen.

67b) Aufg. In ein gegebenes Kreissegment das grösste Rechteck einzuschreiben.

Lös. Der Halbmesser des Kreises sei $= r$, die Entfernung der Sehne des Segmentes vom Mittelpunkte des Kreises sei $= n$. Die Grundlinie des gesuchten Rechtecks ist $\sqrt{2r^2 - \frac{1}{2}n^2 + n\sqrt{2r^2 + \frac{1}{4}n^2}}$. Für $n = 0$, ist $x = r\sqrt{2}$.

67c) Aufg. Aus 4 Seiten a, b, c, d ein Viereck von grösstmöglichem Inhalt zu construiren.

Lös. Nennt man den Winkel, der von den Seiten a und d gebildet wird, x und den gegenüberliegenden y, so besteht die Bedingung $a^2 + d^2 - 2ad \cos x = b^2 + c^2 - 2bc \cos y$, und der Inhalt des Vierecks wird ein Maximum, wenn $x + y = 2R$, d. h. wenn das Viereck ein Kreisviereck ist.*)

68) Aufg. Ueber dem Durchmesser eines gegebenen Halbkreises sollen zwei sich berührende Halbkreise und über diesen ein ganzer Kreis beschrieben werden, welcher die drei Halbkreise be-

---

*) Ueber die Construction eines solchen Vierecks vergleiche man *Heis* und *Eschweiler*, Lehrbuch der Geometrie 1. Theil Kap. XI. 25. Ueber Maxima und Minima in der Planimetrie vergleiche man 1. Theil Kap. XII. und über die der Stereometrie 2. Theil. Anhang IX. desselben Lehrbuchs.

rührt. Es sollen die Radien der drei neuen Kreise der Bedingung gemäss bestimmt werden, dass der Flächenraum, welcher übrig bleibt, wenn man die Flächen der gesuchten Halbkreise und des ganzen Kreises von der Fläche des gegebenen Halbkreises abzieht, ein Maximum oder ein Minimum werde.

Lös. Nennt man den Mittelpunkt des gegebenen Halbkreises O, die Mittelpunkte der beiden gesuchten Halbkreise und des gesuchten Vollkreises beziehungsweise A, B, C und bezeichnet man die zugehörigen Radien mit r, r_1, r_2, r_3, so bestehen bei Einführung der Differenz $r-2r_1=x$ als unabhängige Variable die Beziehungen

$$r_1=\frac{r-x}{2},\quad r_2=\frac{r+x}{2},\quad r_3=r\,\frac{r^2-x^2}{3r^2+x^2},$$

von denen die letzte dadurch erhalten wird, dass man den cosinus des Winkels ABC aus den beiden Dreiecken OBC und ABC als Function der Seiten berechnet und die gefundenen Werthe mit einander vergleicht.

Die in Rede stehende Fläche F erreicht ihren kleinsten oder grössten Werth für diejenigen Werthe der unabhängigen Veränderlichen x, für welche der Ausdruck $\frac{x^2}{2}+2r^2\left(\frac{r^2-x^2}{3r^2+x^2}\right)^2$ ein Maximum oder Minimum wird. Entsprechend den reellen Wurzeln $x=0$ und $x=\pm 0{,}2892542\ldots r$ der Gleichung $x(x^6+9r^2x^4+59r^4x^2-5r^6)=0$ wird demnach die Fläche F ein Minimum für $r_1=r_2=\frac{1}{2}r$, $r_3=\frac{1}{3}r$, ein Maximum für $\left.\begin{matrix}r_1\\r_2\end{matrix}\right\}=0{,}3553729\ldots r$, $\left.\begin{matrix}r_2\\r_1\end{matrix}\right\}=0{,}6446271\ldots r$, $r_3=0{,}2971565\ldots r$. Die übrigen vier Wurzeln der angegebenen Gleichung sind imaginär.

(Vergl. C. W. Baur, Schlömilchs Zeitschr. für Math. u. Phys. 1860, S. 369.)

69) Aufg. Es soll das grösste rechtwinklige Parallelepipedum gefunden werden, welches einer Kugel von gegebenem Radius r eingeschrieben werden kann,

a) wenn die Grundfläche ein Quadrat sein soll,

b) wenn die Grundfläche ein Rechteck mit einer gegebenen Seite $= a$ sein soll.

Lös. a) Die Entfernung des die Grundfläche bildenden Schnitts vom Mittelpunkt der Kugel ist $= r\sqrt{\frac{1}{3}}$.

b) Die Entfernung des die Grundfläche bildenden Schnitts vom Mittelpunkt der Kugel ist $= \sqrt{\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{8}a^2}$.

70) Aufg. Unter den Parallelepipeden, welche denselben cubischen Inhalt, eine gleiche Kante und eine gleiche Ecke haben, dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Lös. Wenn der cubische Inhalt $= J$ ist, die gegebene Kante $= r$, die drei ebenen Winkel, welche die gegebene Ecke bilden, α, β, γ, so dass α und β die Kante r zum gemeinschaftlichen Schenkel haben, so wird bekanntlich das Perpendikel, welches vom Endpunkt der Kante r auf die gegenüberliegende Ebene gefällt wird

$$= \frac{2r}{\sin\gamma}\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}.$$

Wenn man die hier vorkommende Wurzelgrösse durch R bezeichnet, so werden die Werthe der beiden andern Kanten des Parallelepipeds, welches der in der Aufgabe gestellten Bedingung genügt: $\sqrt{\frac{J\,.\,\sin\alpha}{r\,.\,R\,.\sin\beta}}$ und $\sqrt{\frac{J\,.\,\sin\beta}{r\,.\,R\,.\sin\alpha}}$, wovon die erste den Winkeln β und γ, die zweite den Winkeln α und γ zum gemeinschaftlichen Schenkel dient. — Es ergibt sich hierbei, dass die beiden an der Kante r liegenden Seitenflächen an Flächeninhalt gleich sind.

71) Aufg. Unter allen geraden dreiseitigen Prismen, deren Höhe $= h$, Grundfläche $= g$ und eine Seitenfläche $= s$ ist, dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Lös. Diejenige Seite der Grundfläche, auf welcher die gegebene Seitenfläche steht, ist offenbar $= \frac{s}{h}$. Nennt man die beiden dieser Seite anliegenden Winkel der Grundfläche x und y,

so besteht die Bedingungsgleichung $g = \frac{s^2}{h^2} \cdot \frac{\sin x \sin y}{2 \sin (x+y)}$,
und es ist die Function $\frac{\sin x + \sin y}{\sin (x+y)}$ zu einem Minimum zu machen. Das Minimum tritt ein für $x = y$, d. h. die beiden nicht gegebenen Seitenflächen des gesuchten Prisma sind congruent.

72a) Aufg. Unter allen geraden Cylindern von gleichem kubischen Inhalt J denjenigen zu finden, der die kleinste Oberfläche hat.

Lös. Der Radius der Grundfläche des gesuchten Cylinders wird $= \sqrt[3]{\frac{J}{2\pi}}$ und seine Höhe $= 2\sqrt[3]{\frac{J}{2\pi}}$, d. h. die Höhe ist dem Durchmesser der Grundfläche gleich. Der Cylinder kann also einem Würfel eingeschrieben werden.

72b) Aufg. Unter allen geraden Cylindern von gleichem kubischen Inhalte J denjenigen zu finden, dessen Mantel nebst einer der Grundflächen ein Minimum wird.

Lös. Der Halbmesser der Grundfläche $= \sqrt[3]{\frac{J}{\pi}}$, die Höhe des Cylinders wird ebenso gross.

73) Aufg. Unter allen geraden Cylindern von gleicher Oberfläche F denjenigen zu finden, der den grössten kubischen Inhalt hat.

Lös. Der Durchmesser der Grundfläche wird $= 2\sqrt{\frac{F}{6\pi}}$, und die Höhe des Cylinders wird ebenso gross.

74) Aufg. Unter allen geraden Kegeln von gleichem kubischen Inhalt I denjenigen zu finden, welcher den kleinsten Mantel hat.

Lös. Der Radius der Grundfläche des gesuchten Kegels wird $= \sqrt[3]{\frac{3I}{\pi\sqrt{2}}}$, die Höhe $= \sqrt[3]{\frac{6I}{\pi}}$, die Seitenlinie $= \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{3I}{\pi\sqrt{2}}}$, so dass sich das Quadrat des Radius der Grundfläche, zum Quadrat der Höhe, zum Quadrat der Seite $= 1:2:3$ verhält.

75) Aufg. Unter allen geraden Kegeln von gleichem kubischen Inhalt I denjenigen zu finden, der die kleinste Oberfläche hat.

Lös. Der Radius der Grundfläche, Höhe und Seitenlinie sind $\sqrt{\frac{3I}{2\pi\sqrt{2}}}$, $2\sqrt[3]{\frac{3I}{\pi}}$, $3\sqrt[3]{\frac{3I}{2\pi\sqrt{2}}}$, so dass also die Seitenlinie des Kegels das Dreifache vom Radius der Grundfläche ist.

76) Aufg. Unter allen geraden Kegeln von gleichem Mantel M denjenigen zu finden, der den grössten kubischen Inhalt hat.

Lös. Der Radius der Grundfläche, die Höhe und die Seite sind $= \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{M}{\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{2M}{\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{3M}{\pi}}$, und es verhalten sich ihre Quadrate zu einander wie $1:2:3$.

77) Aufg. Unter allen geraden Kegeln von gleicher Oberfläche F denjenigen zu finden, der den grössten kubischen Inhalt hat.

Lös. Der Radius der Grundfläche, die Höhe und Seite sind $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$, $\sqrt{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$, $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$. Die Seite ist das Dreifache von dem Radius der Grundfläche.

78) Aufg. Unter allen Kugelabschnitten von dem kubischen Inhalt I die bestimmenden Stücke desjenigen zu finden, für welchen die gesammte Oberfläche (Calotte nebst begrenzender Kreisfläche) ein Maximum wird.

Lös. Der Radius r der zugehörigen Kugel wird $= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{6I}{\pi}}$ und die Höhe des Abschnitts $= 2r$, d. h. der Abschnitt ist die Kugel selbst mit dem Radius r.

79) Aufg. Unter allen Kugelabschnitten mit der gegebenen gesammten Oberfläche $= F$, die bestimmenden Stücke desjenigen zu finden, welcher den grössten kubischen Inhalt hat.

Lös. Der verlangte Kugelabschnitt wird eine vollständige Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$.

80) Aufg. Unter allen Kugelausschnitten von dem kubischen Inhalt I denjenigen zu bestimmen, dessen Oberfläche ein Maximum oder Minimum wird.

Lös. Wenn der Radius r der Kugel $= \sqrt[3]{\frac{15J}{2\pi}}$ und die Höhe h des zugehörigen Kugelabschnittes $= \frac{4}{5}r$, so findet ein Minimum statt; ist dagegen $r = h = \sqrt[3]{\frac{3J}{2\pi}}$, so erhält man die Halbkugel als Maximum.

81) Aufg. Unter allen Kugelabschnitten mit der gesammten Oberfläche $= F$ denjenigen zu finden, dessen kubischer Inhalt ein Maximum oder Minimum ist.

Lös. Wenn r und h die nämliche Bedeutung haben, wie in der vorigen Aufgabe, so ergibt die Rechnung ein Maximum für $r = \sqrt{\frac{F}{\pi}}$, $h = \frac{4}{5}r$, ein Minimum für $r = h = \sqrt{\frac{F}{3\pi}}$. Man erhält demnach, abgesehen von der absoluten Grösse, die nämlichen Kugelausschnitte, wie in der vorigen Aufgabe; nur tritt hier ein Maximum ein, wo dort ein Minimum war und umgekehrt.

82) Aufg. In einen gegebenen geraden Kegel den seinem kubischen Inhalte nach grössten Cylinder einzuschreiben.

Lös. Wenn der Radius der Grundfläche des Kegels $= r$, die Höhe des Kegels $= h$ ist, so wird der Radius der Grundfläche des gesuchten Cylinders $= \frac{2}{3}r$, und seine Höhe $= \frac{1}{3}h$.

83) Aufg. In einen gegebenen geraden Kegel denjenigen Cylinder einzuschreiben, welcher die grösste krumme Oberfläche hat.

Lös. Bei derselben Bezeichnung wie in der vorigen Aufgabe wird der Radius der Grundfläche des Cylinders $= \frac{1}{2}r$ und seine Höhe $= \frac{1}{2}h$.

84) Aufg. In einen gegebenen geraden Kegel denjenigen Cylinder einzuschreiben, dessen gesammte Begrenzungsflächen ein Maximum bilden.

Lös. Unter der Voraussetzung, dass $h > r$, werden Radius der Grundfläche und Höhe des Cylinders $\frac{rh}{2(h-r)}$ und $\frac{h(h-2r)}{2(h-r)}$.

85) **Aufg.** In eine gegebene Kugel, mit dem Radius r, den seinem kubischen Inhalt nach grössten Cylinder einzuschreiben.

Lös. Der Radius der Grundfläche $= r\sqrt{\frac{2}{3}}$, die Höhe $= 2r\sqrt{\frac{1}{3}}$.

86) **Aufg.** In eine gegebene Kugel einen Cylinder einzuschreihen, dessen krumme Oberfläche ein Maximum ist.

Lös. Der Radius der Grundfläche $= r\sqrt{\frac{1}{2}}$, die Höhe $= r\sqrt{2}$.

87) **Aufg.** In eine gegebene Kugel einen Cylinder einzuschreiben, dessen gesammte Begrenzungsfläche ein Maximum wird.

Lös. Der Radius der beiden Endflächen des Cylinders ist $= r\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}}$ und seine Höhe $= 2r\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}}$.

Zus. Legt man durch die Axe des Cylinders eine Ebene, so erhält man als Durchschnitt derselben mit der Cylinderfläche und der Kugel ein dem grössten Kreise der Kugel eingeschriebenes Rechteck von dem Inhalte $4r^2\sqrt{\frac{1}{5}}$. Dieses Rechteck lässt sich leicht in den Kreis einschreiben. Theilt man nämlich dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, so ist die Höhe jedes dieser Dreiecke, welche zur Grundlinie $2r$ haben, $= \sqrt{2r \cdot \frac{2}{5}r}$, welcher Ausdruck leicht zu construiren ist.

88) **Aufg.** In eine gegebene Kugel den seinem kubischen Inhalte nach grössten Kegel einzuschreiben.

Lös. Der Radius der Grundfläche des gesuchten Kegels wird $= \frac{2}{3}r\sqrt{2}$ und seine Höhe $= \frac{4}{3}r$.

89) **Aufg.** In eine gegebene Kugel denjenigen Kegel einzuschreiben, welcher die grösste krumme Oberfläche hat.

Lös. Derselbe Kegel, wie in der vorigen Aufgabe.

90) **Aufg.** In eine gegebene Kugel denjenigen Kegel einzuschreiben, dessen gesammte Begrenzung ein Maximum ist.

Lös. Die Höhe des Kegels wird $= \frac{1}{16}r(23-\sqrt{17}) = r \,.\, 1{,}179806..$, der Radius d. Grundfläche $= \frac{1}{16}r\sqrt{190+14\sqrt{17}} = r \,.\, 0{,}983702...$

Für die Rechnung eignet sich die Höhe des Kegels als unabhängige Variable.

91) **Aufg.** Unter allen sphärischen Dreiecken mit einem gegebenen Winkel α (welcher $< \pi$ sein soll) und einem gegebenen

Flächeninhalt a dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Lös. Die beiden andern Winkel werden unter einander gleich und zwar jeder $= \frac{1}{2}(a+\pi-\alpha)$. Die dem Winkel α gegenüberliegende Seite erhält dann für ihren cosinus den Ausdruck $\frac{\cos\alpha + [\cos\frac{1}{2}(a+\pi-\alpha)]^2}{[\sin\frac{1}{2}(a+\pi-\alpha)]^2}$, welcher als cosinus <1 sein muss, woraus sich die Bedingung ergibt $a \overline{\gtrless} 2\alpha$. Der cosinus jeder der beiden andern Seiten $= \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha . \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(a+\pi-\alpha)$.

92) Aufg. Unter allen sphärischen Dreiecken von einem gegebenen Flächeninhalt $= a$ dasjenige zu finden, dessen Umfang ein Minimum ist.

Lös. Wie gross man sich auch den einen Winkel des gesuchten Dreiecks denken mag, immer müssen die beiden andern Winkel unter einander gleich sein. Hier ergibt sich, dass alle drei Winkel unter einander gleich sein müssen und zwar jeder $= \frac{1}{3}(a+\pi)$ und ebenso auch alle Seiten einander gleich, und zwar wird die Secante der Hälfte jeder Seite $= 2\sin\frac{1}{6}(a+\pi)$.

93) Aufg. Auf einer Kugel sind zwei Parallelkreise gegeben, sowie auch der Pol eines dritten die beiden ersten schneidenden Kreises; es soll dieser dritte so bestimmt werden, dass die Sehne in ihm, welche seine Durchschnittspunkte mit den beiden gegebenen Kreisen verbindet, ein Maximum sei.

Lös. Denkt man sich durch den bekannten Pol der beiden gegebenen Parallelkreise und durch den gegebenen Pol des gesuchten dritten Kreises einen grössten Kugelkreis gelegt, so werden zur Bestimmung der gegenseitigen Lage in diesem folgende Bogen bekannt sein: 1) der Bogen zwischen dem gemeinsamen Pol der Parallelkreise und dem ersten Parallelkreise $= \beta$, 2) der Bogen zwischen demselben Pol und dem zweiten $= \alpha$, wobei $\alpha > \beta$ sein soll, und 3) der Bogen zwischen demselben Pol und dem gegebenen Pol des gesuch-

ten dritten Kreises $= \delta$. Nennt man nun den Bogen zwischen dem zweiten gegebenen Pol und seinem zugehörigen gesuchten dritten Kreis $= x$, so wird 1) wenn $\delta > \frac{\alpha+\beta}{2}$ ist, für $\cos x = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\delta}$ die Sehne $= \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\delta}$ ein Min. 2) wenn $\delta < \frac{\alpha+\beta}{2}$ ist, für $\cos x = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \cdot \cos\delta$ die Sehne $= 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ ein Minimum.

94a) Aufg. In eine gegebene Kugel soll das grösstmögliche Parallelepipedum eingeschrieben werden.

Lös. Wenn r der Radius der Kugel ist, so wird jede der drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten des Parallelepipedums $= 2r\sqrt{\frac{1}{3}}$.

94b) Aufg. In ein gegebenes Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ das Parallelepipedum von grösstem Volumen einzuschreiben.

Lös. Die Kanten des Parallelepipeds werden $\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}}$ und das gesuchte Volumen ist $= \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

95) Aufg. Zu drei gegebenen Punkten soll in derselben Ebene ein vierter gefunden werden, so dass die Summe der Entfernungen desselben von den drei ersten ein Minimum werde.

Lös. Die drei gegebenen Punkte bestimmen ein Dreieck, dessen Winkel A, B, C und die gegenüberliegenden Seiten respective a, b, c sein mögen. Bezieht man den gesuchten Punkt O durch rechtwinkelige Coordinaten auf AB als Abscissenaxe und A als Anfangspunkt, so wird die Summe $OA+OB+OC$ ausgedrückt durch die Function $u=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+[(c-x)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}+$ $+[(x-b\cos A)^2+(y-b\sin A)^2]^{\frac{1}{2}}$. Die Interpretation der Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ und $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ergibt dann leicht als Bedingung eines Minimums der Function u die Beziehung

$\angle AOD + \angle BOD = 120^0$, wo D den Fusspunkt des von O auf AB gefällten Perpendikels bezeichnet. Wenn man daher über jeder der drei Seiten a, b, c einen Kreisbogen beschreibt, der die Fähigkeit hat, einen Winkel von $\frac{4}{3}R$ als Peripheriewinkel zu enthalten, so schneiden sich diese Bogen in einem einzigen und zwar in dem gesuchten Punkte.

Die einzelnen Linien, welche von dem gesuchten Punkte nach den Ecken des Dreiecks gezogen werden, erhalten folgende Werthe:

$$\frac{b \cdot c \cdot \sin(60^0 + A)}{\sin 60^0 . \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc . \cos(60^0 + A)}},$$

$$\frac{c \cdot a \cdot \sin(60^0 + B)}{\sin 60^0 . \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca . \cos(60^0 + B)}},$$

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin(60^0 + C)}{\sin 60^0 . \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab . \cos(60^0 + C)}}.$$

Die Summe aller drei Linien, welche ein Minimum wird, ist

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \sin 60^0 \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}.$$

Besitzt das Dreieck einen Winkel, der grösser ist als 120^0, so schneiden sich die drei Kreisbogen nicht. Die beiden Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ können dann nicht gleichzeitig bestehen. Da nun die gestellte Aufgabe immer eine Lösung zulässt und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ für jeden der Punkte A, B, C die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so wird in diesem Falle, wie leicht einzusehen, derjenige der gegebenen Punkte zugleich der verlangte sein, welcher der Scheitel des stumpfen Winkels ist.

(Vergl. Bertrand, Journal de Liouville, t. VIII.).

96) Aufg. Zu vier gegebenen Punkten soll ein fünfter von der Beschaffenheit gefunden werden, dass die Summe der Entfernungen desselben von den ersten ein Minimum wird.

Lös. Durch ein Verfahren, das dem in der vorhergehenden Aufgabe angegebenen ganz analog ist, findet man den Durchschnitts-

punkt der beiden Diagonalen des Vierecks, welches durch die vier gegebenen Punkte bestimmt ist.

97) **Aufg.** Auf den drei Seiten eines Dreiecks ABC sollen drei Punkte M, N, P gefunden werden, so dass das Dreieck MNP ein Maximum oder Minimum werde.

Lös. Betrachtet man $MB = x$, $PC = y$, $NA = z$ als unabhängige Veränderliche und bezeichnet F eine Function von x, y, z, welche für jede bestimmte Werthegruppe der unabhängigen Veränderlichen den Flächeninhalt des Dreiecks MNP ausdrückt, so sind $x = \frac{c}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, $z = \frac{b}{2}$ diejenigen Werthe, welche gleichzeitig den drei Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ genügen. Das diesen Werthen entsprechende Dreieck wird erhalten, wenn man die Mitten der Seiten AB, AC und BC durch Gerade verbindet. Sein Flächeninhalt ist $= \frac{1}{4} \triangle ABC$. Die Untersuchung der vollständigen Aenderung von F zeigt aber, dass dieses Dreieck weder ein Minimum, noch ein Maximum ist. Dies lässt sich auch leicht geometrisch erkennen. Denkt man sich nämlich den Punkt M, die Mitte von AB, festgehalten, so wird bei dem ausgezeichneten Dreieck $\angle PMB = \angle A$, $\angle NMA = \angle B$. Jedes andere Dreieck, welches seinen Scheitel in demselben Punkt M hat, bei welchem aber die Winkel PMB und NMA beide zugleich grösser oder beide zugleich kleiner als A und B sind, wird kleiner als das Dreieck MNP sein; dagegen jedes Dreieck mit demselben Scheitel, bei welchem PMB grösser oder kleiner als A und NMA kleiner oder grösser als B ist, wird grösser als das ausgezeichnete Dreieck MNP.

98a) **Aufg.** Auf einer gegebenen Linie MN einen Punkt D zu finden, so dass die Verbindungslinien mit zwei auf derselben Seite von MN liegenden gegebenen Punkten A und B ein Minimum zur Summe haben.

Lös. Es heissen m und n die senkrechten Abstände AC und BE der Punkte A und B von MN, es sei ferner $CD = x$, $DE = y$, so wird für ein Minimum von $AD + DB$: $x : y = m : n$ und $\triangle ADC \sim \triangle BDN$.

98b) Aufg. Auf den drei Seiten eines Dreiecks ABC sollen drei Punkte M, N und P gefunden werden, so dass der Umfang des Dreiecks MNP ein Minimum wird.

Lös. Bei der nämlichen Bedeutung der unabhängigen Veränderlichen x, y, z, wie in Aufgabe 97, bezeichne u diejenige Function von x, y, z, welche für jede bestimmte Werthegruppe der unabhängigen Veränderlichen den Umfang des Dreiecks MNP ausdrückt. Die geometrische Interpretation der Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ ergibt $\cos AMN = \cos BMP$ u. s. f. Fällt man daher von den drei Endpunkten des gegebenen Dreiecks Perpendikel auf die Gegenseiten, dann werden die Verbindungslinien der Fusspunkte derselben das gesuchte Dreieck bilden. — Dieses ist aber nur möglich, wenn alle drei Winkel des gegebenen Dreiecks spitze sind; in andern Fällen aber erhält man weder ein Maximum noch ein Minimum.

99) Aufg. Durch einen in der Axe einer Parabel gegebenen Punkt die kleinste Sehne zu ziehen.

Lös. Die auf der Axe senkrecht stehende Sehne wird die kleinste.

100) Aufg. In ein Parabelsegment, welches durch eine auf der Axe senkrecht stehende Sehne abgeschnitten wird, soll das grösste rechtwinkelige Parallelogramm eingeschrieben werden.

Lös. Wenn a die Entfernung der gegebenen Sehne vom Scheitel und b die halbe Sehne ist, so sind $\frac{2}{3}a$ und $\frac{2}{3}b\sqrt{3}$ die beiden Seiten des gesuchten Parallelogramms, dessen Flächeninhalt $\frac{4}{9}\sqrt{3}\,ab$ ein Maximum ist.

101) Aufg. Zwei Durchmesser einer Ellipse schneiden sich unter einem gegebenen spitzen Winkel α, man soll ihre Grösse und Lage so bestimmen, dass das Parallelogramm, dessen Diagonalen sie sind, ein Maximum oder Minimum werde.

Lös. Sei a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe der Ellipse. Betrachtet man den Winkel φ, den der eine Durchmesser mit der grossen Axe bildet, als unabhängige Variable, so findet sich in dem Falle, wo $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha < \frac{b}{a}$ ist, ein Maximum für $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$ und ein Minimum für $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \pi)$, und zwar ist der Flächeninhalt des grössten Parallelogramms $= \frac{4a^2b^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha}{b^2 + a^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha}$ und derjenige des kleinsten $= \frac{4a^2b^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha}{a^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha}$. Ist dagegen $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha > \frac{b}{a}$ oder $\cos\alpha < \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, so treten Minima ein für $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$, $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \pi)$ und Maxima für $\varphi = \frac{1}{2}\alpha \pm \arccos\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \cos\alpha\right)$. In dem Grenzfalle $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \frac{b}{a}$ erreicht die Fläche wieder für $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$ ihren grössten und für $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \pi)$ ihren kleinsten Werth und zwar ist ersterer $= 2ab$, letzterer $= \frac{4a^3b^3}{a^4 + b^4}$.

102) **Aufg.** In der Peripherie einer Ellipse sind zwei Punkte gegeben; man soll einen dritten so bestimmen, dass der Flächeninhalt des durch diese drei Punkte bestimmten Dreiecks ein Maximum oder Minimum wird.

Lös. Wenn der erste Punkt durch die rechtwinkeligen Coordinaten α' und β', der zweite durch α'' und β'' gegeben sind, wenn ferner a die halbe grosse und b die halbe kleine Axe der Ellipse bedeutet, so dass ihre Gleichung wird $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$; dann wird die Abscisse des dritten Eckpunkts des gesuchten grössten Dreiecks $= \frac{a(\beta' - \beta'')}{\sqrt{a^2(\beta' - \beta'')^2 + b^2(\alpha' - \alpha'')^2}}$, wozu natürlich zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe der Ordinate gehören, so dass zwei Dreiecke erhalten werden.

103a) **Aufg.** In eine gegebene Ellipse soll das grösste Viereck eingeschrieben werden.

Lös. Die Gleichung der Ellipse sei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Bezeichnet man die rechtwinkeligen Coordinaten der Eckpunkte des gesuchten Vierecks der Reihe nach mit x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4, so führt die Methode der unbestimmten Multiplicatoren auf Bestimmungsgleichungen für $x_1, y_1; \ldots$, die nicht von einander unabhängig sind, woraus folgt, dass es unendlich viele grösste Vierecke gibt. Da sich ferner zeigt, dass $x_3=-x_1$; $y_3=-y_1$; $x_4=-x_2$, $y_4=-y_2$; $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-\frac{b^2}{a^2}$ sein muss, so sind diese Vierecke Parallelogramme, die erhalten werden, wenn man die Endpunkte conjugirter Durchmesser durch Gerade mit einander verbindet. Der Flächeninhalt eines jeden solchen Vierecks ist demnach $=2ab$.

103b) Aufg. In eine gegebene Ellipse soll das grösste Parallelogramm eingeschrieben werden, welches einen gegebenen spitzen Winkel α enthält.

Lös. Nach der vorhergehenden Aufgabe werden die Diagonalen des gesuchten Parallelogramms conjugirte Durchmesser sein, und man hat daher nur noch die Aufgabe zu lösen, diese conjugirten Durchmesser so zu bestimmen, dass das Parallelogramm dessen Diagonalen sie sind, den gegebenen Winkel α enthält. Ist die Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, so sind die Coordinaten der Eckpunkte des verlangten Parallelogramms

1) $x_1=+a\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotg}\alpha}$; $y_1=+b\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotg}\alpha}$

2) $x_2=-a\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotg}\alpha}$; $y_2=-b\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotg}\alpha}$

3) $x_3=-a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotg}\alpha}$; $y_3=+b\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotg}\alpha}$

4) $x_4=+a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotg}\alpha}$; $y_4=-b\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotg}\alpha}$

Aus diesen Werthen folgt noch beiläufig, dass es für α einen Grenzwerth gibt, dass nämlich immer $\operatorname{tang}\alpha \gtreqless \frac{2ab}{a^2-b^2}$ sein muss

104) Aufg. In eine gegebene Ellipse soll das grösste Dreieck eingeschrieben werden.

Lös. Ist die Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, und bezeichnet man die Coordinaten der Eckpunkte des gesuchten Dreiecks *ABC* der Reihe nach mit x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3, so folgt aus demselben Grunde, wie in Aufgabe 103a), dass es unendlich viele der Ellipse eingeschriebene, grösste Dreiecke gibt. Die Gleichung der Sehne *BC* ist $y-y_2=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)=-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}(x-x_2)$; demnach ist diese Sehne der im Punkte *A* an die Ellipse gelegten Tangente parallel. Ebenso findet sich, dass die Sehne *AB* der Tangente in *C* und die Sehne *AC* der Tangente in *B* parallel ist. Alle diese Dreiecke haben denselben Flächeninhalt $=\frac{3}{4}\sqrt{3}\,ab$, und der Mittelpunkt der Ellipse ist ihr gemeinsamer Schwerpunkt.

105a) Aufg. Man bestimme den Flächeninhalt der Ellipse
$A(x-\alpha)^2+2B(x-\alpha)(y-\beta)+C(y-\beta)^2+1=0$, wo α und β die Coordinaten des Mittelpunktes bedeuten.

Lös. Bezeichnet man den Coordinatenwinkel mit ω und die Coordinaten irgend eines Ellipsenpunktes mit x und y, so sind die Halbaxen a und b dieser Ellipse resp. das Maximum und Minimum des Ausdrucks

$$r=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)\,(y-\beta)\cos\omega},$$

und der Flächeninhalt der Ellipse ist bekanntlich $=ab\pi$. Zur Bestimmung des Productes ab hat man daher, wenn man noch den unbestimmten Multiplicator λ einführt, die Function

$$F=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega+$$
$$+\lambda\,[A(x-\alpha)^2+2B(x-\alpha)(y-\beta)+C(y-\beta)^2+1]$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen. Multiplicirt man die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ mit x, die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ mit y und addirt, so erkennt man, dass für den Fall eines Maximums oder Minimums $\lambda=r^2$ wird. Die quadratische Gleichung

$(AC - B^2)\lambda^2 + (A + C - 2B\cos\omega)\lambda + \sin^2\omega = 0$ ergibt sodann $\lambda_1\lambda_2 = a^2b^2 = \frac{\sin^2\omega}{AC - B^2}$, und daher ist der gesuchte Flächeninhalt $= \frac{\pi\sin\omega}{\sqrt{AC - B^2}}$.

105b) Aufg. Man bestimme den Cubikinhalt des auf rechtwinkelige Coordinaten bezogenen Ellipsoids

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{12}xy - a_{00} = 0.$$

Lös. Auf analoge Weise, wie in der vorhergehenden Aufgabe erhält man für den gesuchten Cubikinhalt

$$\frac{\frac{4}{3}\pi a_{00}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 + 2a_{12}a_{13}a_{23}}}.$$

106) Aufg. Um ein gegebenes Dreieck soll die ihrem Flächeninhalte nach kleinste Ellipse beschrieben werden.

Lös. Das Dreieck ABC sei gegeben durch zwei Seiten $AB = a$, $AC = b$ und den eingeschlossenen Winkel γ. Wählt man die Geraden AB und AC beziehungsweise zur Abscissen- und Ordinatenaxe eines schiefwinkeligen Axensystems, so kann die Gleichung der Ellipse geschrieben werden

$$A(x-\alpha)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + C(y-\beta)^2 + 1 = 0,$$

wo α und β die Coordinaten des Mittelpunktes bedeuten. Die drei Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, dass die Ellipse durch die drei Punkte $x = 0$, $y = 0$; $x = 0$, $y = b$; $x = a$, $y = 0$ geht, ergeben

$$A = -\frac{2\beta - b}{\alpha(\alpha b + \beta a - ab)},\quad B = \frac{(2\alpha - a)(2\beta - b)}{2\alpha\beta(\alpha b + \beta a - ab)},$$
$$C = -\frac{2\alpha - a}{\beta(\alpha b + \beta a - ab)}.$$

Nach Aufgabe 105a) ist der Flächeninhalt der Ellipse $= \frac{\pi\sin\gamma}{\sqrt{AC - B^2}}$, und man hat daher nur noch α und β so zu bestimmen, dass $AC - B^2 = \frac{(2\beta - b)(2\alpha - a)(2\alpha b + 2\beta a - ab)}{4\alpha^2\beta^2(\alpha b + \beta a - ab)^2}$ zu einem Maximum wird. Man findet

$$\alpha = \frac{a}{3},\quad \beta = \frac{b}{3},\quad A = -\frac{3}{a^2},\quad B = -\frac{3}{2ab},\quad C = -\frac{3}{b^2}.$$

Der Flächeninhalt der kleinsten umschriebenen Ellipse ist demnach $= \frac{2}{9}\sqrt{3}\,\pi\,ab\sin\gamma$, ihr Mittelpunkt liegt im Schwerpunkt des Dreiecks und ihre beiden rechtwinkeligen Halbaxen werden

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin(\gamma-30^0)} + \tfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin(\gamma+30^0)}$$

und $\tfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin(\gamma-30^0)} - \tfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin(\gamma+30^0)}$.

107) Aufg. In ein gegebenes Dreieck soll die grösste Ellipse eingeschrieben werden.

Lös. Wenn die Bezeichnungen der vorhergehenden Aufgabe beibehalten werden und die Gleichung der gesuchten Ellipse wieder

$$A(x-\alpha)^2+2B(x-\alpha)(y-\beta)+C(y-\beta)^2+1=0$$

ist, so folgen aus der Bedingung, dass die Ellipse die drei Geraden $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$ berühre, die Werthe

$$A=\frac{4\beta^2}{N},\quad B=\frac{2(2\alpha b+2\beta a-2\alpha\beta-ab)}{N},\quad C=\frac{4\alpha^2}{N},$$

wo $N=(2\alpha b+2\beta a-2\alpha\beta-ab)^2-4\alpha^2\beta^2$.

Der weitere Gang der Rechnung ist dem in der vorhergehenden Aufgabe angedeuteten ganz analog. Der Flächeninhalt der grössten eingeschriebenen Ellipse findet sich $=$ $= \frac{1}{18}\sqrt{3}\,\pi ab.\sin\gamma$, ihr Mittelpunkt ist wieder der Schwerpunkt des Dreiecks und ihre beiden rechtwinkeligen Halbaxen werden

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2-ab.\cos\gamma+\sqrt{(a^2+b^2-ab.\cos\gamma)^2-3a^2b^2.\sin^2\gamma}},$$

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2-ab\cos\gamma-\sqrt{(a^2+b^2-ab\cos\gamma)^2-3a^2b^2\sin^2\gamma}}.$$

Die Berührungspunkte sind die Mittelpunkte der drei Seiten.

108) Aufg. Die grösste Ellipse zu bestimmen, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt.

(Man sehe die betreffende Abhandlung von Gauss, Monatl. Correspondenz von Zach, Bd. XXII, Seite 112.)

109) Aufg. Für welche Ellipsenpunkte ist der Abstand derselben von dem Punkte $x=0$, $y=-\beta$ der kleinen Axe ein Maximum oder Minimum?

Lös. Sind $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ die Coordinaten eines Punktes der Ellipse, so hat man den Ausdruck $a^2\cos^2\varphi + (b\sin\varphi+\beta)^2$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen. Zunächst erkennt man, dass die gesuchten Punkte auf den Normalen liegen müssen, welche von dem gegebenen Punkte an die Ellipse möglich sind. Sodann findet sich

1.) wenn $\beta > \frac{a^2-b^2}{b}$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ein Max. und für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ ein Min.,

2.) wenn $\beta < \frac{a^2-b^2}{b}$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ein Min., für $\varphi = \arcsin\frac{b\beta}{a^2-b^2}$ und für $\varphi = \pi - \arcsin\frac{b\beta}{a^2-b^2}$ Maxima und für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ ein Min.,

3.) wenn $\beta = \frac{a^2-b^2}{b}$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ein Max. und für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ ein Min.

Da $x = 0$, $y = \frac{a^2-b^2}{b}$ die Coordinaten eines Punktes sind, welcher der Ellipsenevolute angehört, so ergibt sich also, dass von dem gegebenen Punkte zwei, drei zusammenfallende und eine vierte verschiedene oder endlich vier von einander verschiedene Normalen möglich sind, je nachdem derselbe ausserhalb, auf oder innerhalb der Evolute der Ellipse liegt. Der Winkel φ kann mittelst der Gleichung $\sin\varphi = \frac{b\beta}{a^2-b^2}$ leicht construirt werden.

110a) Aufg. Der elliptische Cylinder $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ werde von der Ebene $\frac{1}{4}x - y - \frac{1}{3}z = 0$ geschnitten. Man bestimme für die Schnittellipse die Richtung und Länge der Halbaxen a und b, sowie die Coordinaten x_1, y_1, z_1; ... der vier Scheitel.

Lös. Setzt man $f = x^2+y^2+z^2$, $\varphi = x^2+4y^2-1$, $\psi = \frac{1}{4}x - y - \frac{1}{3}z$, so hat man die absoluten Maxima und Minima der Function

$$F = f - \lambda\varphi - 2\mu\psi$$

aufzusuchen. Hierbei bestimmen sich die Grössen x, y, z, λ, μ

aus den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, $\frac{\partial F}{\partial z}=0$, $\varphi=0$ und $\psi=0$. Es ergibt sich

$$\lambda_1=\tfrac{13}{4},\ \lambda_2=\tfrac{13}{16};\ \mu_1=\pm\frac{18}{\sqrt{13}},\ \mu_2=\pm\frac{9}{4\sqrt{13}};$$

$$x_1=-x_2=-\frac{2}{\sqrt{13}},\ y_1=-y_2=\frac{3}{2\sqrt{13}},\ z_1=-z_2=-\frac{6}{\sqrt{13}},$$

$$x_3=-x_4=\frac{3}{\sqrt{13}},\ y_3=-y_4=\frac{1}{\sqrt{13}},\ z_3=-z_4=-\frac{3}{4\sqrt{13}};$$

$$a=\sqrt{\lambda_1}=\tfrac{1}{2}\sqrt{13},\ b=\sqrt{\lambda_2}=\tfrac{1}{4}\sqrt{13}.$$

Werden die Winkel, welche die Axen der Ellipse mit den Coordinatenaxen einschliessen, beziehungsweise mit $\alpha_1\ \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bezeichnet, so folgt

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = 4:-3:\ 12,$$
$$\cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_2 = 12:\ 4:-\ 3.$$

110b) **Aufg.** Man löse die nämliche Aufgabe für die Ellipse, in welcher der elliptische Cylinder $\frac{x^2}{12.13}+\frac{y^2}{9.13}=1$ von der Ebene $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y-z=0$ geschnitten wird.

Lös. Man findet $\lambda_1=13^2$, $\lambda_2=\frac{3}{4}.13^2$; $\mu_1=\pm 4$, $\mu_2=\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$;

$$x_1=-x_2=-12,\ y_1=-y_2=-3,\ z_1=-z_2=-4,$$
$$x_3=-x_4=2\sqrt{3},\ y_3=-y_4=-6\sqrt{3},\ z_3=-z_4=-\tfrac{3}{2}\sqrt{3};$$
$$a=\sqrt{\lambda_1}=13,\ b=\sqrt{\lambda_2}=\frac{13\sqrt{3}}{2};$$
$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = 12:\ 3:4,$$
$$\cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_2 = -\ 4:12:3.$$

110c) **Aufg.** Man löse dieselbe Aufgabe für die Ellipse, in welcher das Ellipsoid $2x^2+5y^2+z^2=1$ von der Ebene $\frac{1}{4}x-y-\frac{1}{3}z=0$ geschnitten wird.

Lös. Es wird $\lambda_1=\frac{13}{17}$, $\lambda_2=\frac{18}{29}$; $\mu_1=\pm\frac{144}{17\sqrt{13.17}}$,

$$\mu_2=\pm\frac{144}{29\sqrt{13.29}};$$

$$x_1=-x_2=-\frac{4}{\sqrt{13.17}},\ y_1=-y_2=\frac{3}{\sqrt{13.17}},\ z_1=-z_2=-\frac{12}{\sqrt{13.17}},$$

$$x_3 = -x_4 = \frac{12}{\sqrt{13.29}},\ y_3 = -y_4 = \frac{4}{\sqrt{13.29}},\ z_3 = -z_4 = -\frac{3}{\sqrt{13.29}};$$

$$a = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\tfrac{13}{17}},\ b = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\tfrac{13}{29}};$$

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = 4 : -3 : 12,$$

$$\cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_2 = 12 : 4 : -3.$$

111) **Aufg.** Es ist die grösste Ellipse zu bestimmen, die erhalten werden kann, indem man einen gegebenen geraden Kreiskegel durch eine Ebene schneidet.

Lös. Bezeichnet man den Neigungswinkel der Schnittebene gegen die Basisebene mit φ, den Winkel des Kegels mit 2α, so muss

$$\sin 2\varphi = 2\sin 2\alpha$$

sein, woraus hervorgeht, dass ein Maximum nur dann existirt, wenn $2\alpha < 30^0$ ist.

112) **Aufg.** In einen viereckigen Thurm, dessen Tiefe b ist, will man einen Balken von der Länge $m\,(m > b)$ hineinschaffen. Welche Höhe h muss die Thüre des Thurmes wenigstens haben, wenn Seitenbewegung des Balkens ausgeschlossen ist?

Lös. Man denke sich den Balken so bewegt, dass seine Enden beziehungsweise auf der innern Rückwand des Thurmes und auf dem Erdboden gleiten. Jede Lage, die der Balken hierbei annehmen kann, bedingt eine gewisse Höhe y der Thüre des Thurmes. Bezeichnet x den Neigungswinkel des Balkens gegen den Erdboden, so wird $y = m\sin x - b\operatorname{tang} x$. Offenbar ist die gesuchte kleinste Höhe der Thüre gleich dem Maximum von y, d. h. es ist

$$h = (m^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \text{ oder } h^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}}.$$

Beispiel: $m = 31\tfrac{1}{4}'$, $b = 16'$, $h = 6\tfrac{3}{4}'$.

113) **Aufg.** Aus einem runden Baumstamme den Balken von der grössten relativen Cohäsionskraft auszuschneiden.

Lös. Heisst die Breite des Balkens x, die Höhe y, so hängt nach dem Gesetze der Mechanik die Grösse der Cohäsion ab von xy^2. Das Maximum dieses Productes findet statt für $x = \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2}$, wenn d der Durchmesser des runden Baum-

stammes ist. Die geometrische Construction ergibt sich hiernach leicht.*)

114) Aufg. In welcher Höhe über einem in einer Ebene liegenden Punkt *A* muss ein Licht *L* von der Intensität *i* angebracht werden, damit ein in derselben Ebene liegender Punkt *B* möglichst hell erleuchtet werde?

Lös. Die Lichtstärke hängt ab von dem Ausdruck $\frac{i \sin LBA}{(LB)^2}$. Heisst daher *a* die Entfernung des Punktes *B* von *A*, so muss das Licht in der Höhe $a\sqrt{\frac{1}{2}}$ über *A* angebracht werden.

115) Aufg. Ein Körper bewegt sich von einem Punkte *C* zu einem Punkte *D* über eine gerade Linie *AB* hinweg und zwar von *C* zur Linie *AB* mit der Geschwindigkeit c' und von *AB* zu *D* mit der Geschwindigkeit c''. Wie ist der Punkt *E* auf der Linie *AB* zu wählen, damit die auf Zurücklegung des Weges *CED* verwandte Zeit ein Minimum werde?

Lös. Es seien die Entfernungen *CH* und *DG* der Punkte *C* und *D* von *AB* mit *p* und *q* bezeichnet, $GH = m$, $HE = x$, so ist $\frac{x}{\sqrt{p^2+x^2}} : \frac{m-x}{\sqrt{q^2+(m-x)^2}} = c' : c''$.

Heissen die Winkel, welche die Linien *CE* und *ED* mit dem auf *AB* in *E* errichteten Lothe *EI* bilden, α und β, so ist $\sin\alpha : \sin\beta = c' : c''$. (Man vergleiche das Gesetz über die Brechung der Lichtstrahlen, sowie bei 98a) das Gesetz über Zurückwerfung derselben.)

116) Aufg. Ein Mann, der sich mit einem Bote in einer Entfernung von 3 Meilen (engl.) vom nächsten Punkte des Ufers befindet, wünscht einen zweiten Punkt am Ufer, der vom ersten 5 Meilen entfernt ist, in kürzester Zeit zu erreichen. Wenn nun der Mann in der Stunde 5 Meilen weit gehen, aber nur 4 Meilen weit rudern kann, so wird gefragt, wo er landen müsse.

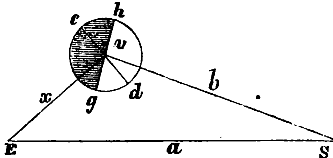
Lös. Eine Meile vor dem zu erreichenden Orte.

---

*) Ueber dieselbe Aufgabe vergleiche man: *Heis* Sammlung von Beispielen u. Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra § 108. 22.

117) **Aufg.** Bei welcher Stellung erscheint Venus, unter der Voraussetzung, dass die Bahn des Planeten eine kreisförmige ist, am hellsten?

Lös. Es befinde sich die Sonne in S, die Erde in E, Venus in v, $SE = a$, $Sv = b$, $Ev = x$, der Radius der Venus $= \varrho$.



Es stehe der Durchmesser gh senkrecht auf Sv, und der Durchmesser cd senkrecht auf Ev.

Die für die Erde sichtbare Lichtphase bestimmt sich aus dem Winkel $gvd = 180^0 - EvS$, und ist $= \frac{1}{2}\pi\varrho^2 - \frac{1}{2}\pi\varrho^2 \cos gvd$ $= \frac{1}{2}\pi\varrho^2(1 + \cos EvS)$.

Die Helligkeit der Venus steht im geraden Verhältnisse mit $1 + \cos EvS$ und im umgekehrten quadratischen Verhältnisse mit x. Setzt man $1 + \cos EvS = \frac{x^2 + b^2 + 2bx - a^2}{2bx}$, so wird die Helligkeit ein Maximum für das Minimum von $\frac{(x+b)^2 - a^2}{x^3}$, hieraus: $x = -2b + \sqrt{b^2 + 3a^2}$. Setzt man $a = 1$, $b = 0{,}7233317$, so ergibt sich $x = 0{,}430358$, $\angle\, gvd = 62^0\, 4'\, 23'',2$, $\angle\, SEv = 39^0\, 43'\, 28'',2$ (Elongation der Venus). Bei einer synodischen Umlaufszeit der Venus von 584 T. gehört zu der angegebenen Elongation eine Zeit von 64 Tagen. Das grösste Licht der Venus hat also im Mittel 64 Tage vor und nach der untern Conjunction mit der Sonne statt.

118) **Aufg.** Welche Werthe der Veränderlichen x, y, z machen die Function $F = x^3 + 3\sqrt{2}\,.\,x^2z + 3xz^2 + \sqrt{5}\,.\,y^3 + 3\sqrt{5}\,.\,yz^2 +$ $+ \sqrt{2}\,.\,z^3 - 3x - 3\sqrt{5}\,.\,y - 3\sqrt{2}\,.\,z +$ Const. zu einem Maximum oder Minimum, und welche ertheilen ihr Sattelwerthe?

Lös. Maxima treten ein für die Werthegruppen $-1, -1, 0$; $0, 0, -1$, Minima für $1, 1, 0$; $0, 0, 1$ und Sattelwerthe für $1, -1, 0$; $-1, 1, 0$; $\frac{5}{\sqrt{7}}, \sqrt{\frac{5}{7}}, -\sqrt{\frac{2}{7}}$; $-\frac{5}{\sqrt{7}}, -\sqrt{\frac{5}{7}}, \sqrt{\frac{2}{7}}$.

119) Aufg. Man beantworte dieselben Fragen für die Function

$$F = x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3xz^2 - 18xyz + y^3 + 3y^2z + \\ + 3yz^2 + z^3 - 3x - 3y - 3z + \text{Const.}$$

Lös. Für die Werthegruppe 1, 1, 1 tritt ein Minimum, für —1, —1, —1 ein Maximum ein, und die 6 Werthegruppen 1,0,0; —1,0,0; 0,1,0; 0,—1,0; 0,0,1; 0,0,—1 ergeben Sattelwerthe.

120) Aufg. Es ist dieselbe Aufgabe zu lösen für die Function

$$F = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2z + 3xz^2 - y^3 + \tfrac{3}{2}y^2z - 3yz^2 - 3x + 3y + \text{Const.}$$

Lös. Ein Minimum tritt ein für die Werthegruppe 1,—1, 0, ein Maximum für —1,1,0. Die Gruppen 1,1,0; —1,—1,0; 0,0,1; 0,0,—1; 1,1,1; —1,—1,—1 liefern Sattelwerthe.

Capitel VIII.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung der Curven und Oberflächen.

§. 22.

A. Ebene Curven. Eine ebene Curve kann dadurch auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen werden, dass man entweder 1) die Coordinaten eines beliebigen Punktes derselben als Functionen einer unabhängigen Veränderlichen t darstellt,

$$x = \varphi(t),\; y = \psi(t),$$

oder 2) eine Gleichung zwischen x und y festsetzt

$$F(x, y) = 0,$$

welcher die Coordinaten eines jeden Curvenpunktes genügen müssen oder 3) die Ordinate eines beliebigen Curvenpunktes als Function der Abscisse ausdrückt,

$$y = f(x).$$

Hierbei kann man sich die Gleichung $F(x, y) = 0$ durch die Elimination der Grösse t aus den Gleichungen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ und die Gleichung $y = f(x)$ durch die Auflösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ nach y entstanden denken.

Tangente und Normale. Entsprechend diesen drei Formen erhält man für die trigonometrische Tangente des Winkels α, den die geometrische Tangente der Curve in irgend einem Punkte x, y mit der positiven X Axe bildet, die Ausdrücke

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Trägt man demnach von dem Punkte x, y aus in der Richtung der X-, resp. Y Axe die Strecken (Componenten) $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ oder 1 und $f'(x)$ auf, so liefert die Diagonale des hierdurch bestimmten Rechtecks

(Resultirende) der Richtung und Länge nach die zugehörige Tangente. Im Falle die Gleichung der Curve in der Form $F(x, y) = 0$ gegeben ist, empfiehlt es sich, zunächst die Normale der Curve zu construiren, deren Componenten in dem soeben angedeuteten Sinn $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ sind. Die Resultirende fällt hierbei in denjenigen Theil der Ebene, in welchem die Function $F(x, y)$ positive Werthe besitzt.

Wird das Bogendifferential mit ds bezeichnet, so ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und man erhält ferner

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds},$$

$$\sin\alpha = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dy}{ds}.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte x, y der Curve wird, wenn ξ, η die laufenden Coordinaten bedeuten,

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0,$$

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x).$$

Die Gleichung der durch den Punkt x, y gehenden Normale ist

$$\frac{dx}{dt}(\xi - x) + \frac{dy}{dt}(\eta - y) = 0,$$

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x).$$

Man nennt Tangente und Normale im engeren Sinne oder schlechtweg Tangente und Normale diejenigen Stücke der gleichbenannten, unbegrenzten Geraden, welche zwischen dem Berührungspunkt der Tangente und der XAxe liegen. Die Projectionen dieser Stücke auf die XAxe heissen beziehungsweise Subtangente und Subnormale.

Führt man für diese vier Grössen die Zeichen T, N, S_t und S_n ein, so erhält man

$$T = \frac{y}{\sin\alpha} = y\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy} = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

$$N = \frac{y}{\cos\alpha} = y\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx} = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$S_t = y\operatorname{cotg}\alpha = y\frac{dx}{dy} = -y\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}},$$

$$S_n = y\operatorname{tang}\alpha = y\frac{dy}{dx} = -y\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Asymptoten. Eine Tangente der Curve, deren Berührungspunkt unendlich weit entfernt ist, die selbst aber nicht ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen liegt, heisst eine Asymptote der Curve.

Die Gleichung einer Asymptote wird im Allgemeinen in einer der beiden Formen geschrieben werden können

$$y = mx + n, \qquad x = \mu y + \nu,$$

und es bestimmen sich m, n, μ, ν aus den Gleichungen

$$m = \lim_{(x=\infty)} \frac{y}{x}, \quad n = \lim_{(x=\infty)} (y - mx);$$

$$\mu = \lim_{(y=\infty)} \frac{x}{y}, \quad \nu = \lim_{(y=\infty)} (x - \mu y).$$

Ist die Curve eine algebraische vom $n$ten Grade, so kann ihre Gleichung, wenn man in u_k alle homogenen Glieder $k$ter Ordnung zusammenfasst, in die Form gebracht werden

$$F(x,y) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0.$$

Die Gleichung der Tangente einer solchen Curve ist dann

$$\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + p = 0,$$

wo $p = -\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right) = nu_0 + (n-1)u_1 + \cdots + 2u_{n-2} + 1 . u_{n-1}$.

Ausgehend von dieser Form der Tangentengleichung, in welcher x und y nur noch im $(n-1)$ten Grade erscheinen, können die Asymptoten

einer Curve n ten Grades auf folgende Weise gefunden werden: Man bestimme die n Werthe von $\frac{y}{x}$, welche der Gleichung $\frac{u_n}{x^n} = 0$ genügen, behalte hierauf in der vorstehenden Tangentengleichung nur die Glieder $(n-1)$ ter Ordnung in x und y bei und setze, nachdem man noch durch x^{n-1} dividirt hat, für das Verhältniss $\frac{y}{x}$ der Reihe nach die gefundenen Werthe in die resultirende Gleichung ein. Jede solche Substitution ergibt dann im Allgemeinen die Gleichung einer Asymptote der Curve.

In manchen Fällen gestattet folgende Modification des angegebenen Verfahrens eine rasche Bestimmung der Asymptoten einer algebraischen Curve: Setzt man in der gegebenen Gleichung n ten Grades $y = zx$ und dividirt dieselbe durch x^n, so wird sie im Allgemeinen folgende Form annehmen:

$$\varphi(z) + \frac{1}{x}\varphi_1(z) + \frac{1}{x^2}\varphi_2(z) + \cdots = 0.$$

Wenn nun $\frac{y}{x} = z$ für $x = \infty$ einer endlichen Grenze m zustrebt, so hat man zur Bestimmung derselben die Gleichung

$$\lim \varphi(z) = \varphi(m) = 0.$$

Substituirt man hierauf

$$z = m + \frac{t}{x}$$

in die obige Gleichung und entwickelt die Functionen $\varphi(z)$, $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots$ nach steigenden Potenzen von $\frac{t}{x}$, multiplicirt die sich ergebende Gleichung mit x und macht $x = \infty$, so erhält man eine Beziehung zwischen m und $n = \lim_{(x=\infty)} t = \lim_{(x=\infty)} (y - mx)$, aus welcher sich für jedes bestimmte m im Allgemeinen ein bestimmter Werth für n ergibt. Die Gleichung der betreffenden Asymptote lautet dann $y = mx + n$.

Den hier angegebenen Methoden liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die Gleichung, aus welcher die Grenzwerthe des Verhältnisses $\frac{y}{x} = z$ zu bestimmen sind, keine mehrfachen Wurzeln besitze. Aus dem Angedeuteten ist jedoch leicht ersichtlich, wie die Untersuchung in den-

jenigen Fällen weiter zu führen wäre, wo in den Gleichungen $\frac{u_n}{x^n} = 0$ und $\varphi(m) = 0$ mehrfache Wurzeln auftreten.

Höchste und tiefste Punkte. Für einen aus der Gleichung $f'(x) = 0$ bestimmten Werth $x = x_0$ erreicht die Ordinate der Curve $y = f(x)$ einen grössten oder kleinsten Werth, je nachdem die erste der folgenden Ableitungen $f''(x)$, $f'''(x), \ldots$, welche für $x = x_0$ nicht verschwindet, von grader Ordnung und negativ oder von grader Ordnung und positiv ist; dagegen tritt weder ein Maximum, noch ein Minimum ein, wenn die erste nicht verschwindende Ableitung von ungrader Ordnung ist.

Convexität und Concavität. Eine Curve ist im Punkte x, y nach der positiven Seite der Y Axe concav oder convex, je nachdem für diesen Punkt $\frac{d^2y}{dx^2} \gtrless 0$ ist.

Unter dem Contingenzwinkel einer Curve versteht man den Winkel, den zwei benachbarte Tangenten, also auch zwei benachbarte Normalen der Curve mit einander bilden; er ist gleich dem Differential $d\alpha$ des Winkels α, den die Tangente mit der positiven X Axe einschliesst. Man findet für rechtwinklige Coordinaten

$$d\alpha = \cos^2\alpha \, d \tang \alpha = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d\frac{dy}{dx} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{ds^2}.$$

Berührung der Curven. Wenn zwei Curven in einem gemeinsamen Punkte noch eine gemeinschaftliche Tangente besitzen, so berühren sie sich in diesem Punkte. Die Art der Berührung kann jedoch eine sehr mannigfache sein. Beschreibt man in dem betrachteten Punkte einen Kreisbogen mit dem an der Grenze unendlich kleinen Radius r und bezeichnet dasjenige Stück desselben, welches zwischen den gegebenen Curven liegt, mit σ, so kann man das Verhältniss $\frac{\sigma}{r}$ nach steigenden Potenzen von r entwickeln, wodurch man etwa erhalten wird

$$\frac{\sigma}{r} = Ar^n + Br^{n+n'} + \cdots$$

Man nennt nun Ordnung der Berührung oder des Contactes der beiden Curven in dem betrachteten Punkte den niedrigsten in der obigen Entwicklung auftretenden Exponenten von r.

In dem Falle, wo die als Functionen der Abscisse betrachteten Ordinaten beider Curven in der Nähe des gemeinschaftlichen Punktes eine Entwicklung nach dem Taylor'schen Lehrsatz gestatten, erhält diese Definition folgenden, für die unmittelbare Anwendung geeigneten Ausdruck: Zwei Curven gehen in einem bestimmten Punkte, welcher für keine derselben ein singulärer ist, einen Contact $n$ter Ordnung mit einander ein, wenn für diesen Punkt die Ordinate und die n ersten Ableitungen y, $\frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}$ für beide Curven gleich sind, während die $(n+1)$ten Ableitungen verschiedene Werthe haben. Dabei haben die Curven $(n+1)$ benachbarte Punkte mit einander gemein und schneiden sich in dem betreffenden Punkte gegenseitig oder berühren sich, ohne einander zu schneiden, je nachdem n eine *grade* oder *ungrade* Zahl ist. Vorausgesetzt wird hierbei, dass die beiden Curven gemeinsame Tangente nicht parallel der YAxe sei.

Der *Krümmungskreis* einer Curve im Punkte x, y hat ausser dem Punkte x, y im Allgemeinen noch zwei benachbarte Punkte mit der Curve gemein. Sein Radius ϱ heisst der *Krümmungsradius* und sein Mittelpunkt der *Krümmungsmittelpunkt*. Der letztere kann auch als der Durchschnitt zweier benachbarten Normalen betrachtet werden. Einige der gebräuchlichsten Ausdrücke für den Krümmungsradius in rechtwinkligen Coordinaten sind:

$$\varrho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}} =$$

$$= \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2}}.$$

Wird x als unabhängige Veränderliche betrachtet, so ist

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

und für die Form $F(x, y) = 0$ der Curvengleichung wird

$$\varrho = \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}.$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes für den Punkt x, y mit X, Y, so ist

$$X = x - \varrho \frac{dy}{ds}, \quad Y = y + \varrho \frac{dx}{ds},$$

oder

$$X = x - \frac{dy}{dx} \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad Y = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Evolute und Evolvente. Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Curve heisst die Evolute (développée) der gegebenen Curve, während die gegebene Curve selbst die Evolvente (développante) der letzteren genannt wird. Sind die Coordinaten x, y eines beliebigen Punktes der gegebenen Curve durch eine dritte Veränderliche t ausgedrückt, so werden auch die Coordinaten X und Y eines Punktes der Evolute im Allgemeinen als Functionen derselben Veränderlichen erscheinen. Gelingt es, in diesem letzteren Falle die Grösse t, oder in dem Falle, wo x die unabhängige Veränderliche ist, mit Hülfe der Gleichung der gegebenen Curve die Grössen x und y zu eliminiren, so erhält man eine Gleichung zwischen X und Y für die Evolute.

Die Normale der Evolvente ist zugleich Tangente der Evolute. Ferner folgt aus der leicht zu beweisenden Gleichung $d\varrho = \sqrt{dX^2 + dY^2}$, dass die Bogenlänge zwischen zwei Punkten der Evolute gleich dem Unterschied der zu diesen Punkten gehörigen Krümmungsradien der Evolvente ist. Man kann sich daher die Evolvente entstanden denken durch Abwicklung eines unausdehnbaren Fadens, welcher in jeder seiner Lagen Tangente an die Evolute ist.

Wenn die Gleichung der Evolute gegeben ist, so findet man für den dem Punkte X, Y entsprechenden Punkt der Evolvente die Gleichungen

$$x = X - S\frac{dX}{dS}, \quad y = Y - S\frac{dY}{dS},$$

wo S die Bogenlänge der Evolute bezeichnet, gezählt von dem Punkte

an, in welchem die Abwicklung beginnt, bis zu dem Punkte X, Y. Können mit Hülfe der Evolutengleichung die Grössen X und Y eliminirt werden, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y für die Evolvente.

Singuläre Punkte. Diejenigen Punkte, in welchen die Curve von der Convexität zur Concavität übergeht und umgekehrt, heissen Inflexions- oder Wendepunkte. Für einen aus der Gleichung $f''(x) = 0$ bestimmten Werth a von x tritt jedesmal ein Wendepunkt ein, wenn von den Ableitungen $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$ etc. die erste für $x = a$ nicht verschwindende von ungrader Ordnung ist. Die Tangente in einem Wendepunkte (Wendetangente) hat daher mit der Curve stets eine ungrade Anzahl (wenigstens drei) benachbarte Punkte gemein und schneidet die Curve. In einem solchen Punkte ist der Krümmungsradius unendlich gross, und man kann somit in manchen Fällen zur Bestimmung der Wendepunkte einer Curve eine der Gleichungen benutzen, die erhalten werden, indem man die Nenner der verschiedenen Ausdrücke für ϱ gleich Null setzt.

Ein Punkt, in welchem sich zwei oder mehrere Zweige einer Curve schneiden, heisst ein Doppelpunkt, resp. ein mehrfacher Punkt der Curve. Ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer Curve und wird vorausgesetzt, es lasse sich die Function $F(x, y)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ entwickeln, wo x_0 und y_0 zwei beliebige specielle Werthe der Veränderlichen x und y bedeuten, so kann nach dem Taylor'schen Satze geschrieben werden

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} \cdot (y - y_0) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0} \cdot (x - x_0)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)_{x_0, y_0} \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x_0, y_0} \cdot (y - y_0)^2\right] + \cdots = 0.$$

Wenn dann $F(x_0, y_0) = 0$ ist, so ist der Punkt x_0, y_0 ein Punkt der Curve, und die Tangente in diesem Punkte hat die Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} \cdot (y - y_0) = 0.$$

Hat man ausserdem noch $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} = 0$ und $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} = 0$, so ist der Punkt x_0, y_0 ein Doppelpunkt. Jede Gerade durch den Doppelpunkt kann in gewissem Sinne als Tangente angesehen werden; die Curve besitzt aber ausserdem im Allgemeinen noch zwei eigentliche Tangenten, welche beide zugleich durch die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0} \cdot (x-x_0)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)_{x_0, y_0} \cdot (x-x_0)(y-y_0) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x_0, y_0} \cdot (y-y_0)^2 = 0$$

dargestellt werden. Je nachdem die beiden so bestimmten Tangenten reell und verschieden, reell und zusammenfallend oder imaginär sind, ist der Punkt x_0, y_0 ein gewöhnlicher Doppelpunkt, ein Rückkehrpunkt (Spitze), sofern in diesem Punkte nicht Selbstberührung der Curve stattfindet, oder ein isolirter oder conjugirter Punkt (Einsiedler). Verschwinden für $x = x_0$, $y = y_0$ auch noch die zweiten Ableitungen, so ist der Punkt ein dreifacher, und die gleich Null gesetzten Glieder dritter Ordnung ergeben die zugehörigen Tangenten. U. s. f.

Das Auftreten eines singulären Punktes ist daher im Allgemeinen an die Bedingung geknüpft, dass gleichzeitig

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

sei. Genügen die Werthe x_0, y_0 diesen drei Gleichungen, so lässt sich das Verhalten der Curve im Punkte x_0, y_0 auf folgende Weise ermitteln: Man denkt sich den Punkt x_0, y_0 mit einem kleinen Kreise vom Radius ϱ umgeben und bestimmt die Punkte, welche dieser Kreis mit der zu untersuchenden Curve gemein hat, d. h. man setzt in die Gleichung der Curve $F(x, y) = 0$

$$x = x_0 + \varrho \cos\varphi, \quad y = y_0 + \varrho \sin\varphi$$

und sucht diejenigen Werthe von φ, für welche $F(\varrho, \varphi)$ verschwindet. Dabei wird es im Allgemeinen hinreichen, nur die Glieder niedrigster Dimension in ϱ, welche nicht identisch verschwinden, zu berücksichtigen. Die Anzahl und gegenseitige Lage dieser gemeinsamen Punkte lässt dann im Allgemeinen beim Uebergang zu einem unendlich kleinen ϱ die Natur der Curve in diesem Punkte erkennen.

Zur Bestimmung der Gestalt singulärer Curvenelemente kann in

manchen Fällen auch folgende Methode mit Vortheil angewendet werden: Wenn x_0, y_0 die Coordinaten des singulären Punktes sind, so denke man sich die Tangente in diesem Punkte zur Abscissenaxe und die Normale zur Ordinatenaxe eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt und entwickle x und y nach steigenden Potenzen einer dritten unabhängigen Veränderlichen t, so dass man etwa erhält

$$x - x_0 = at^m + a_1 t^{m+1} + \cdots,$$
$$y - y_0 = bt^n + b_1 t^{n+1} + \cdots,$$

wo $n > m$ ist und a und b von Null verschieden vorausgesetzt werden. Dann können vier Fälle eintreten:

1. Wenn m eine ungrade und n eine grade Zahl ist, so liegt in der Nähe des Punktes x_0, y_0 die Curve auf derselben Seite der Tangente und auf beiden Seiten der Normale, und die Singularität besteht darin, dass die Tangente mit der Curve einen Contact von höherer als der ersten Ordnung bildet.

2. Wenn m und n ungrade Zahlen sind, so liegt die Curve zu beiden Seiten sowohl der Tangente, als der Normale, und der Punkt x_0, y_0 ist ein Wendepunkt.

3. Ist m eine grade, n aber eine ungrade Zahl, so liegt die Curve auf beiden Seiten der Tangente, aber auf derselben Seite der Normale. Die Curve bildet in diesem Falle im Punkte x_0, y_0 eine Spitze erster Art.

4. Wenn endlich m und n grade sind, so liegt die Curve sowohl auf derselben Seite der Tangente, als auch auf derselben Seite der Normale, und die Curve besitzt in dem betrachteten Punkte eine Spitze zweiter Art oder einen Schnabel.

Polarcoordinaten. Wenn die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten $F(r, \varphi) = 0$ oder $r = f(\varphi)$ gegeben ist, so erhält man leicht sämmtliche bisher angeführten Grössen mittelst der Transformationsformeln

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

wobei r den Leitstrahl (Radius vector) und φ den Polarwinkel (Abweichung) bedeutet. Es ist z. B.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi \frac{dr}{d\varphi} + r\cos\varphi}{\cos\varphi \frac{dr}{d\varphi} - r\sin\varphi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left(\cos\varphi \frac{dr}{d\varphi} - r\sin\varphi\right)^3}.$$

Ferner wird das Bogendifferential

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (rd\varphi)^2},$$

der Contingenzwinkel

$$d\alpha = d\varphi + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 d\,\frac{rd\varphi}{dr},$$

der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\varphi + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 d\,\frac{rd\varphi}{dr}} = \frac{\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^3}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X = r\cos\varphi - \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]\cdot\left[r\cos\varphi + \sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}},$$

$$Y = r\sin\varphi - \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]\cdot\left[r\sin\varphi - \cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

Für die Untersuchung einer auf Polarcoordinaten bezogenen Curve ist es häufig zweckmässig, den Winkel ϑ in Betracht zu ziehen, den der Leitstrahl eines Punktes mit der durch den Punkt an die Curve gezogenen Tangente bildet. Es ist

$$\vartheta = \alpha - \varphi, \quad d\vartheta = d\alpha - d\varphi;$$

$$\sin\vartheta = \frac{rd\varphi}{ds}, \quad \cos\vartheta = \frac{dr}{ds}, \quad \operatorname{tang}\vartheta = \frac{rd\varphi}{dr}.$$

Errichtet man auf den Radius vector im Pole eine Senkrechte, welche die Tangente und die Normale der Curve schneidet, so erhält man, entsprechend den Bezeichnungen für Parallelcoordinaten, indem man an Stelle der XAxe die erwähnte Senkrechte setzt, die Polartangente, — normale, — subtangente, — subnormale.

Es ist

$$\mathfrak{S}_t = r^2 \frac{d\varphi}{dr}, \quad \mathfrak{S}_n = \frac{dr}{d\varphi},$$

$$\mathfrak{T} = r\sqrt{1+\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}, \quad \mathfrak{N} = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}.$$

Wenn dem Werthe $\varphi = \alpha$ ein unendlich grosser Radius vector r entspricht, so besitzt die Curve eine diesem Radius vector parallele Asymptote, falls für $\varphi = \alpha$ die Subtangente $\frac{r^2 d\varphi}{dr}$ einen endlichen Werth behält.

B. Raumcurven. Eine doppelt gekrümmte Curve oder eine Raumcurve kann dadurch gegeben werden, dass man die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes derselben als Functionen einer vierten Veränderlichen t darstellt:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Kann aus diesen drei Gleichungen die Grösse t eliminirt werden, so erhält man zwei Gleichungen

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

welche, zusammengenommen, die Curve als Durchschnitt zweier Flächen erscheinen lassen.

Bezeichnen α, β, γ die Winkel, welche die Tangente an die Curve im Punkte x, y, z mit den Coordinatenaxen einschliesst, so findet sich

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

wo $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

das Bogendifferential der Curve bedeutet.

Es sind demnach die Gleichungen der Tangente im Punkte x, y, z

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dt}},$$

und die Gleichung der Normalebene in diesem Punkte wird

$$\frac{dx}{dt}(\xi - x) + \frac{dy}{dt}(\eta - y) + \frac{dz}{dt}(\zeta - z) = 0.$$

Diejenige Ebene, welche zwei benachbarte Curvenelemente oder ausser dem Punkte x, y, z noch die zwei benachbarten Curvenpunkte

enthält, heisst die **Osculations-** oder **Schmiegungsebene** oder auch die **Krümmungsebene** der Curve im Punkte x, y, z. Ihre Gleichung lautet:

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0,$$

wo $A = dy\,d^2z - dz\,d^2y$, $B = dz\,d^2x - dx\,d^2z$, $C = dx\,d^2y - dy\,d^2x$. Die Normale dieser Ebene im Punkte x, y, z heisst die **Binormale** der Curve, weil sie auf zwei benachbarten Curvenelementen zugleich senkrecht steht. Sind λ, μ, ν die Winkel, welche dieselbe mit den Coordinatenaxen einschliesst, so ist

$$\cos\lambda = \frac{A}{D}, \quad \cos\mu = \frac{B}{D}, \quad \cos\nu = \frac{C}{D},$$

wo $D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2} =$

$$= ds^2\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

Wird der Winkel zweier benachbarten Tangenten oder der **Contingenzwinkel** mit $d\tau$ bezeichnet, so findet sich

$$d\tau = \frac{D}{ds^2} = \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}.$$

Das Verhältniss des Contingenzwinkels $d\tau$ zum Bogendifferential ds heisst die **erste Krümmung** der Curve oder die Krümmung in der Osculationsebene. Bezeichnet man den Radius der ersten Krümmung mit ϱ, so hat man die Beziehungen

$$\varrho d\tau = ds, \quad \varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{D}.$$

Unter der **Hauptnormale** der Curve im Punkte x, y, z versteht man diejenige Normale, welche in der Osculationsebene liegt. Werden die Winkel, welche sie mit den Coordinatenaxen bildet, mit a, b, c bezeichnet, so findet sich

$$\cos a = \frac{d\cos\alpha}{d\tau} = \varrho\cdot\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \cos b = \frac{d\cos\beta}{d\tau} = \varrho\cdot\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},$$

$$\cos c = \frac{d\cos\gamma}{d\tau} = \varrho\cdot\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

In der Hauptnormale liegt der **Krümmungsmittelpunkt**, dessen Coordinaten sind:

$$X = x + \varrho^2 \cdot \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad Y = y + \varrho^2 \cdot \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad Z = z + \varrho^2 \cdot \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Man nennt den Winkel, den zwei benachbarte Osculationsebenen mit einander bilden, den **Schmiegungs- (Torsions-) oder Windungswinkel**. Wird derselbe mit $d\vartheta$ bezeichnet, so ist

$$d\vartheta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2} = \frac{Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z}{D^2} \cdot ds.$$

Wenn für alle Werthe von x, y, z die Grösse $d\vartheta = 0$ oder der Zähler von $d\vartheta$, d. i. die Determinante

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0$$

ist, so ist die Curve eine ebene Curve.

Zwischen den Winkeln a, b, c; α, β, γ und λ, μ, ν bestehen folgende, von **Frénet** herrührende Formeln:

$$\cos a = \frac{d\cos\alpha}{d\tau} = -\frac{d\cos\lambda}{d\vartheta}, \quad \cos b = \frac{d\cos\beta}{d\tau} = -\frac{d\cos\mu}{d\vartheta},$$

$$\cos c = \frac{d\cos\gamma}{d\tau} = -\frac{d\cos\nu}{d\vartheta}.$$

Das Verhältniss des Schmiegungswinkels zum Bogendifferential heisst die **zweite Krümmung** oder die **Windung (Torsion)** der Curve, und der reciproke Werth r der zweiten Krümmung

$$r = \frac{ds}{d\vartheta}$$

wird der **Radius der zweiten Krümmung** genannt.

Zuweilen wird die Grösse

$$dk = \sqrt{d\tau^2 + d\vartheta^2}$$

als **Winkel der ganzen Krümmung** der Curve bezeichnet. Es ist diess der Winkel, den zwei benachbarte Hauptnormalen mit einander einschliessen. Nach Analogie der ersten und zweiten Krümmung einer doppelt gekrümmten Curve wird das Verhältniss

$$\frac{dk}{ds} = \sqrt{\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}} = \frac{1}{R^*}$$

die ganze Krümmung und die Grösse R^* der Radius der ganzen Krümmung der Curve genannt. (Schell.)

Die Ebene, welche im Punkte x, y, z senkrecht steht auf der Hauptnormale, heisst rectificirende Ebene. Ihre Gleichung ist

$$\cos a(\xi - x) + \cos b(\eta - y) + \cos c(\zeta - z) = 0.$$

Die Schnittlinie zweier benachbarten rectificirenden Ebenen heisst rectificirende Kante. Bezeichnet man die Winkel, welche die rectificirende Kante mit den Coordinatenaxen einschliesst, mit a^*, b^*, c^*, so ist

$$\cos a^* = \frac{d\vartheta}{dk}\cos\alpha + \frac{d\tau}{dk}\cos\lambda = \frac{R^*}{r}\cos\alpha + \frac{R^*}{\varrho}\cos\lambda,$$

$$\cos b^* = \frac{d\vartheta}{dk}\cos\beta + \frac{d\tau}{dk}\cos\mu = \frac{R^*}{r}\cos\beta + \frac{R^*}{\varrho}\cos\mu,$$

$$\cos c^* = \frac{d\vartheta}{dk}\cos\gamma + \frac{d\tau}{dk}\cos\nu = \frac{R^*}{r}\cos\gamma + \frac{R^*}{\varrho}\cos\nu.$$

Diejenige Kugelfläche, welche in einem bestimmten Punkte der Raumcurve vier unendlich benachbarte Punkte mit der Raumcurve gemeinsam hat, heisst Schmiegungskugel der Raumcurve in diesem Punkte. Ihr Mittelpunkt, welcher der Schnittpunkt dreier benachbarten Normalebenen ist, hat von der Osculationsebene den Abstand

$$h = \frac{d\varrho}{d\vartheta} = r\frac{d\varrho}{ds}.$$

Der Radius R der Schmiegungskugel ergibt sich aus der Gleichung

$$R^2 = \varrho^2 + r^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

Die Schraubenlinie, welche im Punkte x, y, z mit der Raumcurve alle hier berechneten Grössen, mit Ausnahme der Schmiegungskugel, gemein hat, wird die osculirende Helix der Curve genannt. Die Axe des Rotationscylinders, auf welcher dieselbe liegt, ist der rectificirenden Kante parallel. Werden die Coordinaten eines Punktes dieser Schraubenlinie gegeben durch die Gleichungen

$$x = m\cos\varphi, \quad y = m\sin\varphi, \quad z = n\varphi,$$

so sind die Constanten m und n zu bestimmen aus den Gleichungen

$$\varrho = \frac{m^2 + n^2}{m}, \quad r = \frac{m^2 + n^2}{n},$$

wo ϱ und r die Radien der ersten und zweiten Krümmung der vorliegenden Raumcurve im Punkte x, y, z sind.

C. **Krumme Oberflächen.** Eine krumme Oberfläche kann allgemein gegeben werden durch drei Gleichungen, welche die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes der Fläche als Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen u und v darstellen:

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v).$$

Gelingt es, hieraus die Grössen u und v zu eliminiren, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, z als Gleichung der Fläche

$$F(x, y, z) = 0,$$

welche durch Auflösung nach z, falls dieselbe möglich ist, die Form annimmt

$$z = f(x, y).$$

Es werde zur Abkürzung gesetzt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkte x, y, z ist

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0,$$

oder
$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

Sind X, Y, Z die Cosinus der Winkel, welche die Normale im Punkte x, y, z mit den Coordinatenaxen einschliesst, so wird

$$X = \frac{1}{W} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{1}{W} \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{1}{W} \frac{\partial F}{\partial z},$$

wo
$$W = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

oder wenn die Fläche durch die Gleichung $z = f(x, y)$ gegeben ist

$$X = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Y = -\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Z = \frac{+1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

und die Gleichungen der Normale sind demnach

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Die Länge der Normale vom Berührungspunkt der Tangentialebene bis zur

Ebene der YZ wird $= x\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} = -\frac{x}{\frac{\partial F}{\partial x}}\cdot W$

" " XZ " $= y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = -\frac{y}{\frac{\partial F}{\partial y}}\cdot W$

" " XY " $= z\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = -\frac{z}{\frac{\partial F}{\partial z}}\cdot W.$

Jede durch die Normale im Punkte x, y, z gelegte Ebene schneidet die Fläche in einer Curve, welche Normalschnitt genannt wird. Bildet die Tangente an den Normalschnitt im Punkte x, y, z die Winkel α, β, γ mit den Coordinatenaxen, so ist der Krümmungsradius R des Normalschnittes

$$R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

Der Krümmungsradius eines schiefen Schnittes, dessen Ebene durch dieselbe Tangente (α, β, γ) geht und mit der Ebene des Normalschnittes den Winkel ω bildet, hat zum Ausdruck

$$\varrho = R\cos\omega. \quad \text{(Satz von Meunier).}$$

Unter sämmtlichen Normalschnitten im Punkte x, y, z gibt es im Allgemeinen zwei, deren Krümmungsradien resp. ein Maximum R_1 und ein Minimum R_2 sind. Diese Normalschnitte, deren Ebenen senkrecht auf einander stehen, werden Hauptnormalschnitte und die zugehörigen Krümmungsradien Hauptkrümmungsradien genannt. Die Richtungen der Hauptnormalschnitte sind bestimmt durch die drei Gleichungen

$$[pqt - (1+q^2)s]\cos^2\beta + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\cos\alpha\cos\beta +$$
$$+ [(1+p^2)s - pqr]\cos^2\alpha = 0,$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta,$$

während die Hauptkrümmungsradien sich ergeben aus den Gleichungen

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, \quad \text{(Gauss'sches Krümmungsmass.)}$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{(Mittlere Krümmung).}$$

Zwischen dem Krümmungsradius R eines beliebigen Normalschnittes, dessen Ebene mit der Ebene von R_1 den Winkel φ bildet und den Hauptkrümmungsradien besteht die Beziehung

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \qquad \text{(Satz von Euler.)}$$

Ein Punkt, in welchem die Hauptkrümmungsradien und in Folge dessen die Krümmungsradien sämmtlicher Normalschnitte einander gleich sind, heisst ein Kreispunkt oder ein Nabelpunkt der Fläche. (Umbilicus). Das Vorkommen eines Kreispunktes bedingt das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{t}{1+q^2} = \frac{s}{pq}.$$

Cylinderflächen. Eine cylindrische Oberfläche entsteht im Allgemeinen durch die Bewegung einer geraden Linie, die während ihrer Bewegung einer andern festen Geraden parallel bleibt und immer durch eine gegebene Curve, die Leitcurve, geht.

Seien die Gleichungen der beweglichen Geraden

$$ax + by + cz = \alpha,$$
$$a'x + b'y + c'z = \beta.$$

Hierin sind a, b, c, a', b', c' als constant, α und β dagegen als veränderlich zu betrachten, so jedoch, dass $\beta = \varphi(\alpha)$ irgend eine Function von α sein muss, die von der Natur der leitenden Curve abhängt. Demnach sind sämmtliche Cylinderflächen in der Gleichung enthalten

$$a'x + b'y + c'z = \varphi(ax + by + cz).$$

Durch Differentiation und Elimination der willkürlichen Function φ erhält man hieraus die partielle Differentialgleichung der Cylinderflächen

$$(c'b - cb')p + (a'c - ac')q - (b'a - ba') = 0,$$

welche ausdrückt, dass die Tangentialebene an den Cylinder beständig der Geraden $ax + by + cz = 0$, $a'x + b'y + c'z = 0$ parallel bleibt.

Kegelflächen. Eine conische Oberfläche wird durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, welche beständig durch einen gegebenen festen Punkt und durch eine gegebene Curve, die Leitcurve, geht.

In den Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$\frac{x-a}{A}=\frac{y-b}{B}=\frac{z-c}{C}$$

oder $$\frac{x-a}{z-c}=\frac{A}{C}=\alpha,\quad \frac{y-b}{z-c}=\frac{B}{C}=\beta$$

sind a, b, c, die Coordinaten des gegebenen festen Punktes, als constant, α und β dagegen als veränderlich anzusehen, so zwar, dass $\beta=\varphi(\alpha)$ irgend eine von der Natur der leitenden Curve abhängige Function von α ist. Die Gleichungen sämmtlicher Kegelflächen sind demnach von der Form

$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right).$$

Die partielle Differentialgleichung der Kegelflächen

$$z-c=p(x-a)+q(y-b)$$

zeigt, dass jede Tangentialebene einer conischen Oberfläche durch den Mittelpunkt der Fläche geht.

Rotationsflächen. Eine Rotationsoberfläche entsteht durch die Bewegung eines Kreises von veränderlichem Radius, dessen Mittelpunkt stets auf einer gegebenen geraden Linie (Rotationsaxe)

$$\frac{x-a}{A}=\frac{y-b}{B}=\frac{z-c}{C}$$

bleibt, während seine Ebene beständig senkrecht zu dieser Geraden ist. Ein Kreis im Raum wird bestimmt als Schnitt einer Kugelfläche mit einer Ebene. Die Gleichungen des beweglichen Kreises werden demnach sein

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\beta$$
$$Ax+By+Cz=\alpha.$$

Hierin sind die Grössen a, b, c; A, B, C constant, während zwischen den Veränderlichen α und β eine Bedingungsgleichung $\beta=\varphi(\alpha)$ stattfinden muss, welche von dem Gesetze abhängt, nach welchem der Radius des beweglichen Kreises sich ändert. Die Kenntniss einer ebenen oder doppelt gekrümmten Curve, welche auf der Fläche liegt und durch deren Rotation man sich die Fläche entstanden denken kann, reicht im Allgemeinen zur Bestimmung der Function φ hin. Die Gleichung der Rotationsfläche wird demnach die Gestalt haben

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\varphi(Ax+By+Cz).$$

Die partielle Differentialgleichung der Rotationsoberflächen lautet
$$p[B(z-c)-C(y-b)]+q[C(x-a)-A(z-c)]-[A(y-b)-B(x-a)]=0.$$

E n v e l o p p e n. Wird in der Gleichung einer ebenen Curve $U=f(x, y, \alpha)=0$ der Parameter α variabel gedacht, so entspricht dieser Gleichung eine ganze Schaar von Curven. Zwei Curven der Schaar, welche benachbarten Werthen von α entsprechen, werden sich im Allgemeinen schneiden. Für die Schnittpunkte bestehen gleichzeitig die Gleichungen
$$U=0, \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha}=0.$$
Die Elimination von α aus diesen Gleichungen, sofern dieselbe möglich ist, ergibt eine Relation zwischen x und y, $F(x, y)=0$, welche unabhängig von dem speciellen Werth von α ist und somit die Gleichung derjenigen Curve darstellt, in welcher sämmtliche Schnittpunkte benachbarter Curven der Schaar liegen. Diese Curve $F(x, y)=0$ wird die e i n h ü l l e n d e C u r v e oder die E n v e l o p p e, die Curvenschaar $U=0$ dagegen die e i n g e h ü l l t e (enveloppée) genannt. Die einhüllende Curve hat in jedem ihrer Punkte eine gemeinschaftliche Tangente mit der gegebenen, ihrer Form und Lage nach veränderlichen Curve.

Denkt man sich ebenso in der Gleichung der Fläche $U=f(x, y, z, \alpha)=0$ den Parameter α stetig veränderlich, so stellt diese Gleichung eine Schaar von unendlich vielen Flächen dar. Zwei benachbarten Werthen von α entsprechen zwei Flächen der Schaar, welche sich im Allgemeinen in einer Curve schneiden, die C h a r a k t e r i s t i k genannt wird. Für dieselbe gelten demnach die Gleichungen
$$U=0, \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha}=0.$$
Durch Elimination des Parameters α aus diesen beiden Gleichungen erhält man eine Gleichung zwischen x, y, z, welche allen Charakteristiken zukommt. Es ist diess die Gleichung der e i n h ü l l e n d e n F l ä c h e. Die Schnittpunkte zweier benachbarten Charakteristiken genügen den drei Gleichungen
$$U=0, \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha}=0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}=0.$$

Gelingt es, aus diesen drei Gleichungen α zu eliminiren, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y, z, welche diejenige Curve darstellen, auf welcher die Schnittpunkte je zweier benachbarten Charakteristiken liegen. Diese Curve führt den Namen Rückkehrkante oder Wendungscurve oder Gratlinie. (Arête de rebroussement). Sie wird ebenso von allen Charakteristiken berührt, wie die einhüllende Oberfläche von allen eingehüllten.

Abwickelbare Flächen. Wenn die veränderliche Fläche, deren Gleichung $U = 0$ nur von dem einzigen willkürlichen Parameter α abhängt, eine Ebene ist, so heisst ihre Enveloppe eine developpable oder abwickelbare Fläche. In diesem Falle ist die Charakteristik eine gerade Linie, und die ganze Fläche kann als aus lauter ebenen Elementen bestehend angesehen werden. Da diese unendlich schmalen Elemente sich längs gerader Linien an einander anschliessen, so können sie in eine Ebene ausgebreitet oder abgewickelt werden. Zwei benachbarte Erzeugende einer developpablen Fläche schneiden sich in einem Punkte; die Gesammtheit dieser Punkte bildet eine Raumcurve, die Rückkehrkante der developpablen Fläche. Die Erzeugenden der developpablen Fläche sind die Tangenten der Rückkehrkante; die Ebenen, welche zwei benachbarte Erzeugenden enthalten, also die Tangentialebenen der developpablen Fläche, sind die Osculationsebenen der Rückkehrkante. Man kann sich daher jede developpable Fläche entstanden denken sowohl als Enveloppe der Tangenten einer Raumcurve, als auch als Enveloppe der Schmiegungsebenen derselben.

Wenn
$$z = ax + by + c$$
die Gleichung der beweglichen Ebene ist, welche in allen ihren Lagen Schmiegungsebene einer gegebenen Raumcurve sein soll, so werden die Coefficienten b und c Functionen von a sein, $b = \varphi(a)$, $c = \psi(a)$, welche abhängen von der Natur der gegebenen Raumcurve. Man hat demnach
$$z = ax + \varphi(a) . y + \psi(a).$$
Denkt man sich von einem Punkte der Curve, welcher einem speciellen

Werthe von a entspricht, zum nächstfolgenden übergegangen d. h differentiirt man diese Gleichung in Bezug auf a, so erhält man

$$0 = x + y\,\frac{d\varphi(a)}{da} + \frac{d\psi(a)}{da}$$

$$0 = \quad y\,\frac{d^2\varphi(a)}{da^2} + \frac{d^2\psi(a)}{da^2}.$$

Die beiden ersten Gleichungen gehören der Charakteristik der Fläche an. Gelingt es, aus denselben die Grösse a zu eliminiren, so erhält man die Gleichung der developpablen Fläche; die Elimination von a aus allen drei Gleichungen würde zwei Gleichungen zwischen x, y, z ergeben, welche der Rückkehrkante der Fläche zukommen.

Durch partielle Differentiation der ersten Gleichung erhält man

$$p = a,\ q = \varphi(a) \text{ oder } q = \varphi(p).$$

Eine Fläche ist daher abwickelbar, wenn zwischen p und q eine Beziehung besteht, die von x, y, z unabhängig ist. Die Gleichung $z = ax + + \varphi(a).y + \psi(a)$ liefert jetzt als eine weitere Form der Gleichung einer abwickelbaren Fläche

$$z - px - qy = \psi(p).$$

Aus der Gleichung $q = \varphi(p)$ ergibt sich endlich noch

$$s = \varphi'(p).r, \quad t = \varphi'(p).s$$

und hieraus durch Elimination von $\varphi'(p)$ die partielle Differentialgleichung der developpablen Flächen

$$s^2 = rt.$$

---

§. 23. Beispiele.

A. Ebene Curven.

Tangenten und Normalen.

1) Aufg. Es ist zu zeigen, dass das Stück der Tangente an die Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

welches zwischen den beiden Coordinatenaxen liegt, die constante Länge a hat.

2) Aufg. Welche Bedingung muss zwischen ε und ε_1 bestehen, damit die Ellipse $\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1$, wo $\varepsilon < 1$,

und die Hyperbel $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{A^2(\varepsilon_1^2 - 1)} = 1$, wo $\varepsilon_1 > 1$,

sich unter rechten Winkeln schneiden?

Lös. Es muss $a\varepsilon = A\varepsilon_1$, d. h. die beiden Kegelschnitte müssen confocal sein.

3) Aufg. Man zeige, dass sich sämmtliche Curven, deren Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$$

ist, indem n verschiedene constante Werthe beigelegt werden, in dem Punkte a, b berühren.

4) Aufg. Es soll bestätigt werden, dass die höchsten und tiefsten Punkte der Curve

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0. \qquad \text{(Lemniscate)}$$

auf dem Kreise $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$ liegen.

5) Aufg. Betrachtet man in der Gleichung

$$y = Ce^{-2px} + \frac{x^2}{2p} - \frac{x}{2p^2} + \frac{1}{4p^3}$$

C als variablen Parameter, so soll für die durch diese Gleichung dargestellte Curvenschaar der Ort der Punkte bestimmt werden, in welchen die Tangenten der X Axe parallel sind.

Lös. Der gesuchte Ort ist die Parabel $x^2 = 2py$.

6) Aufg. Auf welcher Curve liegen die Punkte, in denen die Tangenten an die einzelnen Curven der durch die Gleichung

$$y = Ce^x + \frac{\sin x + \cos x}{2} - 1$$

dargestellten Curvenschaar mit der positiven X Axe einen Winkel von 45^0 einschliessen?

Lös. Der gesuchte geometrische Ort ist die Curve $y = \sin x$.

7) Aufg. Fällt man von einem festen Punkte A aus Perpendikel auf sämmtliche Tangenten einer ebenen Curve, so bilden deren Fusspunkte eine neue Curve, welche die Fusspunktencurve der gegebenen Curve für den Punkt A als Pol genannt wird.

Wenn dem Punkte P der gegebenen Curve ein Punkt π der Fusspunktencurve entspricht, so soll gezeigt werden, dass die Tangente an

die Fusspunktencurve im Punkte π ebenfalls Tangente an den Kreis ist, der über AP als Durchmesser beschrieben wird.

8) Aufg. Man bestimme für den Coordinatenanfangspunkt als Pol die Fusspunktencurve der Curve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1.$$

Lös. Die Fusspunktencurve hat die Gleichung

$$(a\xi)^{\frac{n}{n-1}} + (b\eta)^{\frac{n}{n-1}} = (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Für $a = b$ und $n = \frac{2}{3}$ (Vergl. Aufg. 1) erhält man hieraus

$$(\xi^2 + \eta^2)^3 = a^2\xi^2\eta^2.$$

Für die gleichseitige Hyperbel, $b = a\sqrt{-1}$, $n = 2$, ergibt sich die Lemniscate

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 + a^2(\eta^2 - \xi^2) = 0.$$

9) Aufg. Man zeige, dass die Fusspunktencurve der Curve

$$r = a \sec^3 \frac{\varphi}{3}$$

für den Pol des Coordinatensystems eine Parabel ist.

10) Aufg. Es soll bewiesen werden, dass die Fusspunktencurve der Curve

$$r^n = a^n \cos n\varphi$$

für den Pol des Coordinatensystems wieder eine Curve von derselben Art ist.

11) Wenn eine Curve A längs einer zweiten Curve B in derselben Ebene rollt, ohne zu gleiten, so beschreibt irgend ein mit der Curve A fest verbundener Punkt eine Rolllinie oder Roulette.

Es soll gezeigt werden, dass die Normale in einem beliebigen Punkte der Roulette durch den entsprechenden Berührungspunkt der Curven A und B geht. (Descartes).

Asymptoten. 12) Aufg. Es sind die Asymptoten folgender Curven zu bestimmen:

a) $y^3 + x^3 - 3axy = 0$. (Folium von Descartes).

Lös. $y = -x - a$.

b) $xy^2 - x + 2y - 1 = 0$.

Lös. $x = 0$, $y = \pm 1$.

c) $x(x^2-a^2)-2y(y^2-a^2)-3xy^2-a^3=0.$

Lös. $y=\frac{1}{2}x,\ y=-x\pm a.$

d) $y^3-3y^2x-yx^2+2x^3+y^2-6xy+5x^2-2y+2x+1=0.$

Lös. $y=x,\ y=-x-2,\ y=2x+1.$

e) $xy^2+yx^2=a^3.$

Lös. $x=0,\ y=0,\ y=-x.$

f) $r\cos\varphi=a\cos 2\varphi.$

Lös. $r\cos\varphi=-a.$

g) $r^2=a^2\dfrac{\sin 3\varphi}{\cos\varphi}.$

Lös. $\varphi=\dfrac{\pi}{2}.$

h) $r\varphi=a.$ (Hyperbolische Spirale).

Lös. $r\sin\varphi=a.$

i) $r\cos 2\varphi=a.$

Lös. $r(\sin\varphi\pm\cos\varphi)=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}.$

Singuläre Punkte.

Wendepunkte. 13) Aufg. Man bestimme die Wendepunkte folgender Curven:

a) $y=a^2\dfrac{a-x}{x^2+a^2}.$

Lös. $\begin{cases}x_1=-a,\\ y_1=a;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=a(2+\sqrt{3}),\\ y_2=-\dfrac{a}{4}\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}};\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=a(2-\sqrt{3}),\\ y_3=\dfrac{a}{4}\,\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.\end{cases}$

Die drei Punkte liegen auf der Geraden $y-a=-\frac{1}{4}(x+a).$

b) $y=3x^5-2x^6.$

Lös. $x=0,\ y=0;\ x=1,\ y=1.$

Die Gerade $y=0$ ist eine fünfpunktig berührende Wendetangente.

c) $x^3-axy-b^2y=0.$ (Trident von Newton).

Lös. $x=0,\ y=0.$

d) $y=3x^5+5x^4-10x^3-30x^2+4x+8.$

Lös. $x=+1,\ y=-20.$

Der Punkt $x=-1,\ y=-14$ ist kein Wendepunkt

e) $y=\sin^3 x.$

Lös. $x = n\pi$, $y = 0$, wo n eine ganze Zahl bedeutet;

$x = \text{arctang}\,(\pm\sqrt{2})$, $y = (\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}$.

f) $y = \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{12}\sin 2x$.

Lös. Die Punkte $x = 2k\pi$, $y = k\pi$, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet, sind Wendepunkte, welche beziehungsweise mit den Geraden $y = k\pi$ fünf unendlich benachbarte Punkte gemein haben. Die Punkte $x = (2k+1)\pi$, $y = \frac{2k+1}{2}\pi$ sind gewöhnliche Wendepunkte.

g) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. (Lemniscate).

Lös. $r = 0$, $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$.

h) $r = \frac{a\varphi^2}{\varphi^2 - 1}$.

Lös. $r = \frac{3a}{2}$, $\varphi = \pm\sqrt{3}$.

i) $r = a\varphi^n$.

Lös. $r = a[-n(n+1)]^{\frac{n}{2}}$, $\varphi = [-n(n+1)]^{\frac{1}{2}}$.

Für $n = -1$ verliert dieses Resultat seine Bedeutung. Die Spirale, die sich für $n = -\frac{1}{2}$ ergibt, nämlich $r^2 = \frac{a^2}{\varphi}$ ist bekannt unter dem Namen Lituus. Sie besitzt einen Wendepunkt für $r = \sqrt{2a^2}$, $\varphi = \frac{1}{2}$.

14) Aufg. Wenn in den folgenden drei Gleichungen a einen variablen Parameter bezeichnet, so wird der geometrische Ort der Wendepunkte sämmtlicher Curven der durch diese Gleichungen gegebenen Curvenschaaren verlangt.

a) $y = \frac{x^2}{2} + a\sin x$.

Lös. $y = \frac{x^2}{2} + 1$.

b) $y = \frac{2x^2}{a^2 + x^2}$.

Lös. $y = \frac{1}{2}$.

c) $y = ae^x - x^2 - 1$.

Lös. $y = -x^2 + 1$.

15) Aufg. Es sind die Singularitäten folgender Curven zu untersuchen:

a) $y^3 + x^3 - 3axy = 0$. (Folium von Descartes).

Lös. Der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein Doppelpunkt, und die Coordinatenaxen sind die Tangenten in demselben.

b) $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$.

Lös. Die Curve besitzt drei Doppelpunkte:

$$x = 0,\; y = -a;\quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

$$x = a,\; y = 0;\quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$x = -a,\; y = 0;\quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

c) $\dfrac{y^2x^2}{(y+b)^2} + y^2 = a^2$. (Conchoide).

Lös. Der Punkt $x = 0$, $y = -b$ ist ein Doppelpunkt, ein Rückkehrpunkt erster Art oder ein isolirter Punkt, je nachdem $b \lesseqgtr a$ ist.

d) $y^4 + x^4 - 2ay^3 + 2bx^2y = 0$.

Lös. Der Coordinatenanfangspunkt ist ein dreifacher Punkt. Die Tangenten an die drei Curvenzweige sind bestimmt durch

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

e) $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$. (Vergl. Aufg. 8.)

Lös. Der Coordinatenanfangspunkt ist ein vierfacher Punkt. Die Coordinatenaxen sind die Tangenten an die vier Curvenzweige.

f) $x^4 + y^4 - 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 = 0$.

Lös. Die vier Punkte $x = 0,\; y = \pm a;\; \dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$,

$$x = \pm a,\; y = 0;\quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2}$$

sind Doppelpunkte. Wenn eine Curve vierter Ordnung vier Doppelpunkte besitzt, so muss sie in Curven niedrigerer Ordnung zerfallen. Die vorliegende Curve zerfällt in die beiden Ellipsen $x^2 + \sqrt{2}\,xy + y^2 - a^2 = 0$ und $x^2 - \sqrt{2}\,xy + y^2 - a^2 = 0$.

g) $x^4 + x^2y^2 - 6ax^2y + a^2y^2 = 0$.

Lös. Die Curve berührt sich selbst im Coordinatenanfangspunkte,

und die X Axe ist die gemeinsame Tangente der sich berührenden Curvenzweige.

h) $(by-cx)^2-(x-a)^5=0$.

Lös. Die Curve kann auch dargestellt werden durch die Gleichungen

$$x=a+t^2,$$
$$y=\frac{1}{b}(ac+ct^2+t^5).$$

Der Punkt $x=a$, $y=\frac{ac}{b}$ ist ein singulärer. Die Tangente in diesem Punkte hat die Gleichung

$$y-\frac{ac}{b}=\frac{c}{b}(x-a).$$

Bezeichnet man die Coordinaten eines Curvenpunktes in Bezug auf diese Tangente als Abscissen- und die zugehörige Normale als Ordinatenaxe mit ξ und η, so hat man zu setzen

$$\xi=c\cdot\frac{y-\frac{ac}{b}+\frac{b}{c}(x-a)}{\sqrt{b^2+c^2}},\quad \eta=b\cdot\frac{y-\frac{ac}{b}-\frac{c}{b}(x-a)}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

wodurch man erhält

$$\xi=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}\left(\frac{b^2+c^2}{bc}t^2+\frac{t^5}{b}\right),\quad \eta=\frac{t^5}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Da hier $m=2$, $n=5$ ist (vergl. § 22), so bildet die Curve in dem betrachteten Punkte eine Spitze erster Art.

i) $y-b=(x-a)^{\frac{1}{3}}+(x-a)^{\frac{3}{4}}$.

Lös. Setzt man $x-a=t^{12}=\eta$,

$$y-b=t^4+t^9=\xi,$$

so ist $m=4$, $n=12$. Folglich ist der Punkt $x=a$, $y=b$ ein Rückkehrpunkt zweiter Art; die Tangente in diesem Punkte ist der y Axe parallel.

k) $x^4-ax^2y-axy^2+\frac{a^2y^2}{4}=0$.

Lös. Drückt man x und y als Functionen der dritten Veränderlichen t aus, wornach z. B.

$$x=at^2,$$
$$y=\frac{2at^4}{1+2t}=2at^4+\cdots,$$

so erkennt man, da $m = 2$, $n = 4$, dass die Curve im Coordinatenanfangspunkte eine Spitze zweiter Art bildet. Die X Axe ist die zugehörige Tangente.

l) $(y^2 - x^2)^2 - x^4 \sin x = 0$.

Lös. Betrachtet man nur Punkte der Curve, die in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ liegen, so findet man, dass im Coordinatenanfangspunkte sich vier Zweige der Curve zu zwei Spitzen erster Art vereinigen. Der Punkt $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ ist ein Doppelpunkt, dessen Tangenten bestimmt sind durch die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\pi}{4}$.

m) $x = r(\varphi - \sin\varphi)$,
$y = r(1 - \cos\varphi)$. (Cycloide).

Lös. Entwickelt man $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ nach steigenden ganzen Potenzen von φ, so wird

$$x = r\left(\frac{\varphi^3}{6} - \cdots\right) = \eta,$$
$$y = r\left(\frac{\varphi^2}{2} - \cdots\right) = \xi.$$

Da hier $m = 2$, $n = 3$ ist, so sind der Coordinatenanfangspunkt und die Punkte $x = 2k\pi$, $y = 0$, wo k irgend eine ganze Zahl bezeichnet, Rückkehrpunkte erster Art. Die Tangenten in diesen Punkten sind der Y Axe parallel.

n) $a^3y^2 - 2a^2(a+x)xy + a(a+x)^2x^2 - x^5 = 0$.

Lös. Zunächst kann man schreiben

$$x = at^2, \quad y = a(t^2 + t^4 + t^5),$$

und man erkennt, dass der Anfangspunkt der Coordinaten ein singulärer Punkt ist. Wählt man hierauf die Tangente in diesem Punkte $y - x = 0$ und die Normale $y + x = 0$ zu neuen Coordinatenaxen, so erhält man mittelst der Formeln

$$\xi = \frac{y+x}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{y-x}{\sqrt{2}}:$$
$$\xi = \frac{a}{\sqrt{2}}(2t^2 + t^4 + t^5),$$
$$\eta = \frac{a}{\sqrt{2}}(t^4 + t^5).$$

Die Curve besitzt somit im Punkte $x=0$, $y=0$ eine Spitze zweiter Art.

o) $(y+x+1)^2=(1-x)^5$.

Lös. Werden die Coordinaten eines Punktes der Curve ausgedrückt durch eine dritte Veränderliche t

$$x-1=-t^2,$$
$$y+2=t^2+t^5,$$

so ergibt sich, dass der Punkt $x=1$, $y=-2$ ein singulärer ist. Die Tangente in diesem Punkte hat die Gleichung $(y+2)+(x-1)=0$. Macht man nun diese Tangente zur Abscissen-, die zugehörige Normale zur Ordinatenaxe eines neuen Coordinatensystems vermittelst der Formeln

$$\eta=\frac{(y+2)+(x-1)}{\sqrt{2}},\quad \xi=\frac{-(y+2)+(x-1)}{\sqrt{2}},$$

so wird $\xi=-\frac{2t^2+t^5}{\sqrt{2}}$, $\eta=\frac{t^5}{\sqrt{2}}$,

und man erkennt, dass die Curve in dem betrachteten Punkte eine Spitze erster Art besitzt.

p) $y^5+ax^4-b^2xy^2=0$.

Lös. Im Coordinatenanfangspunkt besitzt die Curve einen dreifachen Punkt, einen Wendepunkt und eine Spitze erster Art.

Anm. Die meisten in dieser Nummer enthaltenen Curven finden sich in dem Werke von Cramer: Introduction à l'analyse des lignes courbes. (Genf 1750).

Berührung der Curven.

16) Aufg. Man bestimme die Parabel, deren Axe der Ordinatenaxe parallel ist und welche mit der Curve

$$y=\frac{x^3}{a^2}$$

im Punkte $x=a$, $y=a$ einen Contact von möglichst hoher Ordnung bildet.

Lös. Die Gleichung der Parabel ist $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a}{3}\left(y-\frac{a}{4}\right)$.

17) Aufg. Es ist zu zeigen, dass der Kreis

$$x^2+y^2-6(x+y)+10=0$$

und die Curve $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$

im Punkte $x = y = 1$ einen Contact dritter Ordnung mit einander eingehen.

18) Aufg. Es sollen die beiden Parabeln bestimmt werden, deren Axen den Coordinatenaxen parallel sind und welche im Punkte $x = a$, $y = 2a$ mit dem Kreise $x^2 + y^2 = 5a^2$ einen Contact zweiter Ordnung bilden.

Lös. Die Gleichungen der gesuchten Parabeln sind

$$\left(y - \frac{8a}{5}\right)^2 = \frac{2a}{5}\left(\frac{7a}{5} - x\right)$$

und

$$\left(x - \frac{a}{5}\right)^2 = \frac{16a}{5}\left(\frac{11a}{5} - y\right).$$

19) Aufg. Es ist der geometrische Ort der Mittelpunkte derjenigen Ellipsen zu bestimmen, deren Axenrichtung bekannt ist und welche mit einer gegebenen Curve in einem gegebenen Punkte derselben einen Contact zweiter Ordnung bilden.

Lös. Der gesuchte Ort ist eine gleichseitige Hyperbel, welche durch den gegebenen Punkt geht.

20) Aufg. Man bestimme die Asymptoten der Evolute der Curve

$$y = \operatorname{tang} x.$$

21) Aufg. Wird der Krümmungsradius in irgend einem Punkte einer Curve mit ϱ bezeichnet, so soll bewiesen werden, dass der Krümmungsradius der Evolute dieser Curve in dem entsprechenden Punkte $\varrho \frac{d\varrho}{ds}$ ist.

22) Aufg. Man berechne den Krümmungsradius der Curve

$$r = a \sin 2\varphi.$$

Lös. $\varrho = \frac{(4a^2 - 3r^2)^{\frac{3}{2}}}{8a^2 - 3r^2}$.

23) Aufg. Man bestimme den Krümmungsradius für die Pascal'sche Schnecke.

$$r = a + b \cos\varphi.$$

Lös. $\varrho = \frac{(b^2 + 2ar - a^2)^{\frac{3}{2}}}{3ar + 2b^2 - 2a^2}$.

24) Aufg. Es soll die Evolute der logarithmischen Spirale

$$r = a^{m-\varphi}$$

gefunden werden.

Lös. Bezeichnet p den Abstand des Poles von der Tangente in einem beliebigen Punkte der Curve, so kann die Gleichung der Curve auch geschrieben werden in der Form

$$p = \frac{r}{\sqrt{1 + (la)^2}}.$$

Wenn r' und p' dieselbe Bedeutung für die gesuchte Evolute haben, wie r und p für die gegebene Curve, so hat man die Beziehungen

$$p'^2 = r^2 - p^2,\quad r'^2 = r^2 + \varrho^2 - 2p\varrho,\quad \varrho = r\frac{dr}{dp}.$$

Führt man für ϱ seinen Werth ein, so erhält man

$$p' = \frac{r'}{\sqrt{1 + (la)^2}},$$

d. i. die Gleichung einer Spirale, welche der vorgelegten ähnlich ist.

25) Aufg. Es soll bewiesen werden, dass in solchen Punkten einer gegebenen Curve, in welchen der Krümmungsradius einen grössten oder kleinsten Werth erreicht, der Krümmungskreis mit der gegebenen Curve einen Contact dritter Ordnung bildet.

26) Aufg. Von welcher Ordnung ist die Berührung der beiden Curven

$$\left.\begin{aligned} x &= 2(\varphi - \sin\varphi), \\ y &= 2(1 - \cos\varphi) \end{aligned}\right\} \text{ und } y = (3x)^{\frac{2}{3}}$$

im Coordinatenanfangspunkte?

Lös. Die Ordnung des Contactes ist $\frac{5}{2}$.

27) Aufg. Von welcher Ordnung ist die Berührung der beiden Curven

$$y = x^{\frac{3}{4}} \text{ und } y = x^{\frac{4}{5}}$$

im Coordinatenanfangspunkte?

Lös. Die Ordnung des Contactes ist $\frac{1}{4}$. (In dem Werke: Traité de calcul diff. et de calc. intégral von J. Bertrand wird im I. Theil, pag. 571 irrthümlich $\frac{1}{3}$ als Ordnung des Contactes angegeben).

Untersuchung einiger Curven.

28) Aufg. Es soll die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte untersucht werden.

Lös. Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts ist

$$y^2 = 2px \mp nx^2,$$

wo für den Fall, dass $n = 0$ wird, die Gleichung $y^2 = 2px$ die der Parabel ist; $y^2 = 2px - nx^2$ ist die Gleichung der Ellipse und $y^2 = 2px + nx^2$ die der Hyperbel. Die Grösse $2p$ heisst der Parameter der Curve und ist die durch den Brennpunkt gehende, auf der Hauptaxe senkrecht stehende Sehne.

Heissen a und b resp. die halbe Haupt- und Nebenaxe der Ellipse und Hyperbel, so ist

$$p = \frac{b^2}{a} \text{ und } n = \frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p \mp nx}{y}.$$

Die Gleichung der Tangente an einen Punkt (x', y') ist

$$y - y' = \frac{p \mp nx'}{y'}(x - x').$$

Für $x = 0$ wird $y = \frac{px'}{y'}$; hieraus die einfache Construction einer Tangente im Punkte (x', y') eines Kegelschnitts. Der Ausdruck $y = \frac{px'}{y'}$ wird für die Parabel $= \frac{1}{2}y'$. Da für $y' = \infty$ auch $y = \infty$ ist, so hat die Parabel keine Asymptote. Für die Ellipse und Hyperbel ist

$$y = \frac{px'}{\pm\sqrt{2px' \mp nx'^2}} = \frac{p}{\pm\sqrt{\frac{2p}{x'} \mp n}}.$$

Für $x' = \infty$ erhält man nur bei der Hyperbel den Grenzwerth $y = \frac{p}{\pm\sqrt{n}} = \pm b$, wenn man für p und n die oben angegebenen Ausdrücke einsetzt. Es hat also die Hyperbel zwei Asymptoten. Setzt man in der obigen Gleichung der Tangente $x' = \infty$ und $y = 0$, so erhält man bei der Hyperbel das zu $y = 0$ gehörige $x = -a$.

Die Gleichungen der Asymptoten der Hyperbel sind also

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 1 \quad \text{und} \quad -\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 1.$$

Für die Parabel ist

die Gleichung der Tangente: $y - y' = \frac{p}{y'}(x - x')$ oder: $yy' = p(x + x')$;

die Gleichung der Normale: $y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x')$.

$T = \sqrt{2px' + 4x'^2} = \sqrt{y'^2 + 4x'^2}$, $S_t = 2x'$,
$N = \sqrt{p(2x' + p)} = \sqrt{y'^2 + p^2}$, $S_n = p$, also constant.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts sind

$$X = 3x + p,$$
$$Y = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Der Krümmungshalbmesser ist

$$\varrho = -\frac{(2x' + p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} = -\frac{(y'^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = -\frac{N^3}{p^2}.$$

Die Gleichung der Evolute wird

$$Y^2 = \tfrac{8}{27}\frac{(X - p)^3}{p}.$$

Ist die Gleichung der Parabel $x^2 = 2py$, so ist $X = -\frac{x'^3}{p^2}$, $Y = \frac{2p^2 + 3x'^2}{2p}$, $\varrho = \frac{(p^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$.

Die Gleichung der Evolute ist: $Y - p = \frac{3}{2}p^{\frac{1}{3}}X^{\frac{2}{3}}$.

Die Gleichung der Ellipse und Hyperbel, bezogen auf deren Mittelpunkt als Anfangspunkt, lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{dy}{dx} = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Für einen Punkt (x', y') der Curve ist

die Gleichung der Tangente $y - y' = \mp \frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x')$ oder

$$\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung gilt sowohl für ein rechtwinkeliges, als auch für ein schiefwinkeliges Coordinatensystem.

Für $y = 0$ wird $xx' = a^2$. Die Construction der Tangente an eine Ellipse oder Hyperbel in einem gegebenen Punkte (x', y') derselben und ebenso von einem gegebenen Punkte ausserhalb derselben ist hier-

nach leicht. Um die letztere Aufgabe zu lösen, lege man durch den gegebenen Punkt die X Axe, suche zu derselben mit Hülfe einer bekannten Eigenschaft conjugirter Durchmesser die Y Axe und construire die Abscisse des Berührungspunktes der gesuchten Tangente mittelst der Gleichung $x' = \frac{a^2}{x}$.

Die Gleichung der Normale ist für das rechtwinklige Coordinatensystem

$$y - y' = \pm \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'),$$

oder $$x \frac{y'}{b^2} \mp y \frac{x'}{a^2} = x'y'\left(\frac{1}{b^2} \mp \frac{1}{a^2}\right).$$

Für den Kreis ist $b = a$, also der Ausdruck rechts $= 0$, d. h. die Normale geht durch den Mittelpunkt des Kreises. Setzt man in der Gleichung der Normale $y = 0$, so ist das zugehörige $x = x' \frac{a^2 \mp b^2}{a^2} = x'e^2$, wenn e die Excentricität der Ellipse oder Hyperbel bedeutet.

Es ist ferner $S_n = \mp \frac{b^2}{a^2} x'$, $\quad S_t = \frac{a^2 - x'^2}{x'}$.

Die Subtangente ist also unabhängig von b.

Für den Krümmungsradius ergibt sich

$$\varrho = -\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Die Coordinaten des Mittelpunkts der Krümmung ergeben sich aus

$$y - Y = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,y}{a^2b^4}, \qquad x - X = \pm \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)x}{a^4b^2}.$$

Die Gleichung der Evolute der Ellipse und Hyperbel ist, wenn $a^2 \mp b^2 = c^2$ gesetzt wird, $a^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}} \pm b^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$.

Die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf die Asymptoten ist

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

wo das Coordinatensystem im Allgemeinen ein schiefwinkeliges ist.

Die Gleichung der Tangente ist

$$\frac{x}{2x'} + \frac{y}{2y'} = 1,$$

wonach sich dieselbe leioht construiren lässt.

$$S_t = x'.$$

Eine andere Darstellungsweise der **Ellipse** besteht darin, dass man die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve durch eine dritte Veränderliche φ ausdrückt:

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi.$$

Ebenso kann die **Hyperbel** dargestellt werden durch die Gleichungen

$$x = a\sec\varphi, \quad y = b\tang\varphi.$$

Man führe die den vorhergehenden analogen Untersuchungen für diese Darstellungsweise der Ellipse und Hyperbel aus.

29) **Aufg.** Es sollen die hingehörigen Stücke für die unter dem Namen der **Cissoide des Diocles** bekannten Curve bestimmt werden.

Lös. Ein beliebiger Punkt der Curve wird auf folgende Weise gefunden: An einen Kreis vom Radius r werden zwei parallele Tangenten AB und CD gelegt und vom Berührungspunkt O der Tangente AB aus wird eine beliebige Sekante gezogen. Der Schnittpunkt der letzteren mit der Tangente CD sei E. Wenn man nun von E aus rückwärts auf die Sekante die Länge der Sehne, welche von der Sekante durch den Kreis abgeschnitten wird, abträgt, so ist der zweite Endpunkt dieser Strecke ein Punkt der Curve. Wählt man die Verbindungsgerade der Berührungspunkte beider Tangenten zur XAxe, die Tangente AB zur YAxe, so lautet die Gleichung der Cissoide: $x^3 = y^2(2r-x)$;

ihrer Tangente: $$y-y' = \frac{3x'^2+y'^2}{2y'(2r-x')}(x-x');$$

ihrer Normale: $$y-y' = -\frac{2y'(2r-x')}{3x'^2+y'^2}(x-x');$$

$$S_t = -\frac{x'(2r-x')}{3r-x'}, \qquad T = \frac{x'r}{3r-x'}\sqrt{\frac{8r-3x'}{2r-x'}},$$

$$S_n = \frac{x'^2(3r-x')}{(2r-x')^2}, \qquad N = \frac{rx'\sqrt{x'(8r-3x')}}{(2r-x')^2}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird $$\varrho = \pm\frac{r\sqrt{x'}(8r-3x')^{\frac{3}{2}}}{3(2r-x')^2},$$

wobei das obere Zeichen dem oberen, das untere dem unteren Zweige der Curve entspricht.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts: $\begin{cases} Y = \dfrac{8r\sqrt{x'}}{3\sqrt{2r-x'}} = \frac{4}{3}\dfrac{ry'}{x'}, \\ X = -\dfrac{rx'(12r-5x')}{3(2r-x')^2}; \end{cases}$

Gleichung der Evolute: $27Y^4 + 1152r^2Y^2 + 4096r^3X = 0.$

Die Curve besitzt im Anfangspunkt der Coordinaten einen Rückkehrpunkt der ersten Art; die Tangente in diesem Punkte ist die X Axe. Die Gerade $x = 2r$ ist eine Asymptote der Curve. Da $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{3r^2}{\sqrt{x(2r-x)^5}}$ immer dasselbe Zeichen wie die Ordinate y hat, so kehrt die Curve stets ihre convexe Seite der X Axe zu.

30) Aufg. Es soll die gewöhnliche (gemeine) Cycloide untersucht werden.

Lös. Wenn ein Kreis mit dem Radius r auf einer geraden Linie fortrollt, ohne zu gleiten, so beschreibt ein bestimmter Punkt in der Peripherie des Kreises die gewöhnliche (gemeine) Cycloide. Beim Anfange des Rollens möge der bestimmte Punkt auf der Geraden liegen. Dieser sei der Anfangspunkt des Coordinatensystems; die gegebene gerade Linie die X Axe und die darauf senkrechte Gerade die Y Axe.

Derjenige Curvenzug, der entstanden ist, indem der rollende Kreis seine Peripherie einmal auf der Basis abgewickelt hat, wiederholt sich bei der fortgesetzten Bewegung unendlich oft. Die Curve besteht sonach aus unendlich vielen congruenten Curvenzügen. In jedem Punkte, wo sich zwei Züge an einander anschliessen, besitzt sie eine Spitze erster Art. (Vergl. Aufg. 15, m.)

Die Cycloide wird entweder durch das System der beiden Gleichungen

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1-\cos\varphi),$$

oder durch die Gleichung

$$x = r\arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{y(2r-y)}$$

dargestellt.

Die erste Darstellungsweise, die hier allein berücksichtigt werden soll, liefert:

$$\frac{dx}{d\varphi} = r(1-\cos\varphi) = 2r\sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = r\sin\varphi = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2};$$

somit ist $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$.

Hieraus erkennt man leicht, dass die Normale der Curve durch den jeweiligen Berührungspunkt des erzeugenden Kreises mit der X Axe (Vergl. Aufg. 11.) und die Tangente durch den höchsten Punkt dieses nämlichen Kreises geht.

$$ds = 2r\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi,$$

$$N = 2r\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \varrho = -4r\sin\frac{\varphi}{2};$$

folglich ist der Krümmungsradius gleich der doppelten Normale.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X = r(\varphi + \sin\varphi), \quad Y = r(\cos\varphi - 1).$$

Setzt man $X = X' - r\pi$, $Y = Y' - 2r$, $\varphi = \psi - \pi$, so folgt:

$$X' = r(\psi - \sin\psi), \quad Y' = r(1-\cos\psi),$$

woraus erhellt, dass die Evolute der Cycloide wieder eine der ursprünglichen congruente Cycloide ist.

31) Aufg. Es soll die Lemniscate untersucht werden.

Lös. Eine Entstehungsweise der Lemniscate ist folgende: Fällt man von dem Mittelpunkte einer gleichseitigen Hyperbel auf die Tangenten dieser Curve Perpendikel, so ist der geometrische Ort dieser Fusspunkte die unter dem Namen Lemniscate bekannte Curve, deren Gestalt die einer liegenden Acht ist, nämlich ∞. (Vergl. Aufg. 8).

Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel sei $x^2 - y^2 = a^2$; die Gleichung der Tangente ist $xx_1 - yy_1 = a^2$ (1), die Gleichung der vom Mittelpunkte auf die Tangente gefällten Senkrechten $xy_1 + yx_1 = 0$ (2). Durch Verbindung der beiden Gleichungen (1) und (2) mit der Gleichung $x_1^2 - y_1^2 = a^2$ erhält man die Gleichung der Lemniscate:

$$(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0.$$

Wählt man Polarcoordinaten, so wird

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x.(a^2-2x^2-2y^2)}{y.(a^2+2x^2+2y^2)} = \frac{\cos\varphi.(1-2\cos 2\varphi)}{\sin\varphi.(1+2\cos 2\varphi)}; \quad \text{(Vergl. Aufg. 4.)}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}; \qquad \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = -\tang 2\varphi.$$

Die Grösse $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}$ ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Normale mit dem Radius vector bildet. Aus der letzten Formel folgt, dass dieser Winkel doppelt so gross ist, als der Winkel, den derselbe Radius vector mit der Abscissenaxe macht.

Der Krümmungshalbmesser wird $\varrho = \mp\frac{a^2}{3\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{a^2}{3r}$.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts:

$$Y = -\frac{y'(a^2-x'^2-y'^2)}{3(x'^2+y'^2)} = -\frac{2a.\sin^3\varphi}{3\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

$$X = \frac{x'(a^2+x'^2+y'^2)}{3(x'^2+y'^2)} = \frac{2a.\cos^3\varphi}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Die Gleichung der Evolute wird $3(X^{\frac{2}{3}}+Y^{\frac{2}{3}})(X^{\frac{2}{3}}-Y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2a$.

Da in der Gleichung der Lemniscate (in rechtwinkligen Coordinaten) das constante Glied und die Glieder erster Ordnung fehlen, so besitzt die Curve im Nullpunkte einen singulären Punkt und zwar einen Doppelpunkt. Die gleich Null gesetzten Glieder zweiter Ordnung $x^2-y^2=0$ liefern die Tangenten an die beiden Curvenzweige, welche sich in diesem Punkte schneiden. (Vergl. Aufg. 10 und 13, g.)

Zus. Die Grundlinie eines Dreiecks ist gegeben. Man soll den Ort des Scheitels finden, wenn das Product der Seiten dem Quadrate der halben Grundlinie gleich ist.

Aufl. Der Ort ist eine Lemniscate von der Form

$$(x^2+y^2)^2+2m^2(y^2-x^2) = 0.$$

Die halbe Axe der Lemniscate ist also $= m\sqrt{2}$.

32) Aufg. Untersuchung der Conchoide des Nicomedes.

Lös. Denkt man sich eine gerade Linie und zwar, um die Begriffe zu fixiren, in horizontaler Lage, unterhalb derselben in der senkrechten Entfernung b einen Punkt, den man den Pol der Conchoide nennt;

zieht man alsdann von diesem Pol aus gerade Linien durch die feste Gerade und schneidet auf ihnen oberhalb und unterhalb des Durchschnittspunktes eine constante Grösse a ab, so erhält man dadurch zwei Punkte, welche respective zur obern und untern Conchoide gehören. Nimmt man die gegebene feste Gerade zur XAxe, die von dem Pol auf diese gefällte Senkrechte zur YAxe an und zwar so, dass zur obern Conchoide die positiven Werthe der y gehören, zur untern dagegen die negativen, so wird die Gleichung der Conchoide

$$\frac{y^2x^2}{(y+b)^2}+y^2=a^2, \text{ oder}$$

$$y^4+2by^3+(x^2+b^2-a^2)y^2-2a^2by-a^2b^2=0,$$

oder
$$x=\pm\frac{b+y}{y}\sqrt{a^2-y^2}.$$

Für das obere Zeichen $+$ ist alsdann

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2\sqrt{a^2-y^2}}{y^3+a^2b}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a^2y^3(2a^2b-y^3-3by^2)}{(y^3+a^2b)^3}.$$

Die Gleichung der Tangente ist $y-y'=-\frac{y'^2\sqrt{a^2-y'^2}}{y'^3+a^2b}\cdot(x-x');$

„ „ „ Normale „ $y-y'=\frac{y'^3+a^2b}{y'^2\sqrt{a^2-y'^2}}\cdot(x-x').$

$$T=\frac{a\sqrt{y'^4+2by'^3+a^2b^2}}{y'\sqrt{a^2-y'^2}}, \qquad S_t=\frac{y'^3+a^2b}{y'\sqrt{a^2-y'^2}},$$

$$N=\frac{ay'\sqrt{y'^4+2by'^3+a^2b^2}}{y'^3+a^2b}, \qquad S_n=-\frac{y'^3\sqrt{a^2-y'^2}}{y'^3+a^2b}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird $\varrho=\frac{a(y'^4+2by'^3+a^2b^2)^{\frac{3}{2}}}{y'^3(2a^2b-y'^3-3by'^2)}.$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts sind

$$Y=\frac{b\,[a^4b^2-y'^3(y'^3-3a^2y'-3a^2b)]}{y'^3[2a^2b-y'^3-3by'^2]},$$

$$X=\frac{b\,(2y'+3b)\,(a^2-y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'\,(2a^2b-y'^3-3by'^2)}.$$

Die XAxe ist eine Asymptote der Curve.

Der zweite Differentialquotient $=0$ gesetzt, gibt $y^3+3by^2-2a^2b=0$. Die Wurzeln dieser kubischen Gleichung geben die Ordinaten der Wendepunkte, welche aber hinsichtlich ihrer Realität näher zu unter-

suchen sind. Hierbei stellt sich eine Verschiedenheit heraus, je nachdem b grösser als a, oder b kleiner als a ist. Der Punkt $x = 0$, $y = -b$ des unteren Zweiges der Curve ist ein Doppelpunkt, oder ein Rückkehrpunkt erster Art oder ein isolirter Punkt, je nachdem $b \lesseqqgtr a$ ist. (Vergl. Aufg. 15, c.).

Anm. Wenn man auf der ursprünglich als fest angenommenen Geraden eine Ellipse so fortschiebt, dass ihre grosse Axe stets in dieser Linie liegt und von dem angenommenen Pol der Conchoide gerade Linien durch den Mittelpunkt der Ellipse zieht, so werden die beiden Durchschnittspunkte in der Peripherie der Ellipse Punkte einer Curve, die man elliptische Conchoide nennt. Ebenso erhält man auch eine parabolische und eine hyperbolische Conchoide. Wo vorhin die vom Pol ausgehende gerade Linie durch den Mittelpunkt der Ellipse gezogen wurde, wird sie bei den beiden letztern durch einen beliebig angenommenen Punkt der bezüglichen Axe zu ziehen sein.

33) Aufg. Es soll das Folium von Descartes untersucht werden.

Lös. Die Gleichung dieser Curve ist

$$x^3 + y^3 - axy = 0.$$

Hieraus folgt
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - ay}{3y^2 - ax}.$$

Der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein Doppelpunkt, und die Coordinatenaxen sind die Tangenten in demselben. (Vergl. Aufg. 15, a). Die Curve besitzt eine (blattförmige) Schleife und zwei unendliche Aeste. Die Gerade $y = -x - a$ ist eine Asymptote der Curve. (Vergl. Aufg. 12, a). Der höchste Punkt des Blattes hat die Coordinaten

$$x = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{2} \,.\, a = a \,.\, 0{,}42\ldots, \quad y = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{4} \,.\, a = a \,.\, 0{,}53\ldots$$

Der Scheitel des Blattes liegt auf der Geraden $y = x$ und hat die Coordinaten

$$x = y = \tfrac{1}{2}a.$$

Der Krümmungsradius im Coordinatenanfangspunkte und zwar für beide Curvenzweige $= \frac{1}{2}a$, im Scheitel $= \frac{1}{16}a\sqrt{2}$.

34) Aufg. Man untersuche die Curve, welche dargestellt wird durch die beiden Gleichungen

$$x = t^2,$$
$$y = t - \tfrac{1}{3}t^3.$$

Die Ordinate wird gleich Null für $t = 0$ und $t = \pm\sqrt{3}$. Demnach schneidet die Curve die Abscissenaxe im Coordinatenanfangspunkte und in dem Punkte $x = 3$, $y = 0$. Der letztere ist ein Doppelpunkt.

Es wird
$$\frac{dx}{dt} = 2t,$$
$$\frac{dy}{dt} = 1 - t^2.$$

Ein Maximum der Ordinate tritt ein im Punkte $x = 1$, $y = \frac{2}{3}$ für $t = +1$, ein Minimum im Punkte $x = 1$, $y = -\frac{2}{3}$ für $t = -1$.

Im Doppelpunkte sind die Tangenten bestimmt durch
$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (\alpha = \pm 30^0).$$

Ferner wird
$$ds = (1 + t^2)\,dt,$$
$$\varrho = -\tfrac{1}{2}(1 + t^2)^2.$$

Im Coordinatenanfangspunkte ist $\varrho = -\frac{1}{2}$,
im höchsten und tiefsten Punkt $(t = \pm 1)$ $\varrho = -2$,
im Doppelpunkt $(t = \pm\sqrt{3})$ $\varrho = -8$.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind
$$X = \tfrac{1}{2} + t^2 - \frac{t^4}{2}, \qquad Y = -\tfrac{4}{3}t^3.$$

Durch diese beiden Gleichungen ist die Evolute der Curve bestimmt; sie besitzt in dem Punkte $X = \frac{1}{2}$, $Y = 0$ $(m = 2,\ n = 3)$ eine Spitze erster Art.

35) **Aufg.** Es soll die Curve untersucht werden, deren Gleichung ist
$$y = \cos x - \tfrac{1}{4}\cos 2x.$$

Lös. Aus der Curvengleichung folgt
$$\frac{dy}{dx} = -\sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x = \sin x(\cos x - 1),$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x + \cos 2x = -2\sin\tfrac{3}{2}x\sin\tfrac{1}{2}x.$$

In den höchsten Punkten $x = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots 2k\pi$, $y = \frac{3}{4}$, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet, hat die Tangente vier unendlich benachbarte Punkte mit der Curve gemein. Tiefste Punkte treten ein für $x = \pi$, $3\pi, \ldots (2k + 1)\pi$, Wendepunkte für $x = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi, \ldots.$

Ferner wird $$ds = \sqrt{1 + 4\sin^2 x . \sin^4 \frac{x}{2}} \cdot dx$$

$$\varrho = \frac{\left(\sqrt{1 + 4\sin^2 x \sin^4 \frac{x}{2}}\right)^3}{\cos 2x - \cos x}.$$

Demnach wird $\varrho = \frac{1}{2}$ für die tiefsten Punkte der Curve.

36) Aufg. Man untersuche die Curve, deren Gleichung ist

$$y = \tfrac{1}{2}x - \sin x + \tfrac{1}{4}\sin 2x.$$

Lös. Die Punkte, deren Abscissen $x = 0,\ \pi,\ 2\pi, \ldots k\pi$ sind, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet, liegen auf der Geraden $y = \frac{1}{2}x$.

Es ist $$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2} - \cos x + \tfrac{1}{2}\cos 2x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x - \sin 2x.$$

Die Ordinate erreicht ein Maximum für $x = \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi, \ldots \frac{4k-1}{2}\pi$, ein Minimum für $x = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi, \ldots \frac{4k+1}{2}\pi$.

Wendepunkte treten ein für $x = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots 2k\pi$ und für $x = \ldots -\frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{3}\pi,\ \frac{3}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi, \ldots \frac{2k+1}{3}\pi$.

Ferner wird $$ds = \sqrt{1 + \cos^2 x - 2\cos^3 x + \cos^4 x}\ .\ dx,$$

$$\varrho = \frac{(\sqrt{1 + \cos^2 x - 2\cos^3 x + \cos^4 x})^3}{\sin x - \sin 2x}.$$

In den höchsten Punkten wird demnach $\varrho = -1$, in den tiefsten $\varrho = +1$.

37) Aufg. Es soll die logarithmische oder logistische Linie untersucht werden.

Lös. In dieser Curve schreiten die Ordinaten in geometrischer Progression fort, während die Abscissen in arithmetischer Reihe wachsend angenommen werden. Ihre Gleichung wird $y = m\,.\,lx$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{x}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{m}{x^2}.$$

Die Gleichung der Tangente wird $y - y' = \frac{m}{x'}(x - x')$;

" " " Normale " $y - y' = -\frac{x'}{m}(x - x')$.

$$T = lx'\sqrt{m^2 + x'^2}, \qquad S_t = x'lx',$$

$$N = \frac{y'}{x'}\sqrt{m^2 + x'^2}, \qquad S_n = \frac{m^2}{x'}lx' = \frac{y'}{x'}m.$$

Die Subtangente in Bezug auf die Y Axe ist $= -m$.

Der Krümmungshalbmesser $\qquad \varrho = -\frac{(m^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}{mx'}$.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden

$$Y = m.lx' - \frac{m^2 + x'^2}{m} = y' - \frac{m^2 + x'^2}{m},$$

$$X = \frac{2x'^2 + m^2}{x'}.$$

38) Aufg. Es soll die Quadratrix des Dinostratus untersucht werden.

Lös. Wenn man eine gerade Linie um einen festen Endpunkt bewegt denkt, so dass ein Kreisbogen und zwar zunächst ein Quadrant entsteht, so möge die erste Lage des bewegten Radius eine verticale gewesen sein und die Ordinaten- oder YAxe vorstellen, seine letzte Lage, die horizontale, die Abscissen- oder XAxe. Denkt man sich nun auf dem bewegten Radius in einer seiner Lagen einen Punkt so bestimmt, dass der bis dahin beschriebene Bogen sich zum ganzen Viertelkreis wie $r_0 - y$ zu r_0 verhält, so gehört dieser Punkt der Quadratrix an. Nimmt man nun noch an, dass der Winkel, den der bewegte Radius noch zu beschreiben hat, bis er in die horizontale Lage kommt, sich zu zwei Rechten verhält so wie $\varphi : \pi$, so hat man als Gleichung der Quadratrix:

$$y = \frac{2\varphi}{\pi} \cdot r_0; \qquad y = x.\text{tang}\,\varphi; \qquad x = \frac{2\varphi}{\pi.\text{tang}\,\varphi} r_0.$$

Um den Durchschnittspunkt der Curve mit der letzten Lage des bewegten Radius, d. h. mit der Abscissenaxe zu erhalten, muss man $\varphi = 0$ setzen; es wird aber dann $x = \frac{0}{0}$, oder, wenn man nach der gewöhnlichen Methode den wahren Werth bestimmt, $x = \frac{2r}{\pi}$.

Bequemer werden die nöthigen Ausdrücke, wenn man neben φ noch den Radius vector r statt der rechtwinkeligen Coordinaten in die Rechnung einführt; es wird dann $y = r\sin\varphi$, $x = r\cos\varphi$, also die Gleichung der Curve

$$r = \frac{2r_0}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin\varphi};$$

mithin

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{2r_0}{\pi} \cdot \frac{\sin\varphi - \varphi.\cos\varphi}{\sin^2\varphi}; \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = \frac{2r_0}{\pi} \cdot \frac{\varphi.(1+\cos^2\varphi) - 2\sin\varphi.\cos\varphi}{\sin^3\varphi}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{r_0}{\pi} \frac{(\sin^2\varphi - 2\varphi.\sin\varphi.\cos\varphi + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\sin^3\varphi(\sin\varphi - \varphi.\cos\varphi)}$.

Die rechtwinkeligen Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden

$$Y = \frac{r_0}{\pi} \cdot \frac{\sin^3\varphi\cos\varphi + \varphi\sin^2\varphi(1 - 4\cos^2\varphi) + \varphi^2\sin\varphi\cos\varphi(1 + 2\cos^2\varphi) - \varphi^3}{\sin^3\varphi(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)},$$

$$X = -\frac{r_0}{\pi} \cdot \frac{\sin^2\varphi - 4\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \varphi^2(1 + 2\cos^2\varphi)}{\sin\varphi.(\sin\varphi - \varphi.\cos\varphi)}.$$

Um zu untersuchen, ob die Curve Asymptoten hat, muss man in den Ausdruck der Polarsubtangente $r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dr}$, den Radius vector r unendlich setzen oder denjenigen Werth der Abweichung φ, welcher aus der Gleichung der Curve dem unendlichen r entspricht, und dann zusehen, ob die Polarsubtangente einen endlichen Werth erhält. Setzt man aber in $r = \frac{2r_0}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin\varphi}$ den Radius vector $r = \infty$, so wird $\varphi = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ mithin $r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dr} = \frac{2r_0}{\pi} \cdot \frac{\varphi^2}{\sin\varphi - \varphi.\cos\varphi} = 2r_0, -4r_0, +6r_0, -8r_0, \ldots$

Die Curve hat also unendlich viele Asymptoten.

Anm. Ganz ähnlich gibt die Quadratrix von Tschirnhausen als Gleichung

$$y = \frac{2\varphi}{\pi} \cdot r_0 \text{ und } x = r_0.\cos\varphi \text{ oder } x = r_0.\cos\frac{\pi y}{2r_0}.$$

39) Aufg. Es soll die archimedische Spirale untersucht werden.

Lös. Wenn eine gerade Linie um einen festen Endpunkt gleichmässig bewegt wird, und wenn man zugleich auf dieser Linie einen Punkt von dem festen Endpunkte aus sich gleichförmig fortbewegen lässt, so beschreibt dieser Punkt die archimedische Spirale. Ihre Gleichung ist

$$r = a\varphi; \qquad \frac{dr}{d\varphi} = a,$$

wo φ sich auf den Bogen eines Kreises mit dem Radius 1 bezieht.

Nimmt man an, dass der Punkt den Weg r_0 zurückgelegt habe, während die bewegliche Gerade eine ganze Umdrehung gemacht hat, so ist

$$r_0 = 2a\pi, \text{ also } a = \frac{r_0}{2\pi}.$$

Die Polarsubtangente wird $\mathfrak{S}_t = r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \frac{r^2}{a}$

und die Polarsubnormale $\mathfrak{S}_n = \frac{dr}{d\varphi} = a.$

Da die Polarsubnormale constant ist, so lässt sich in jedem beliebigen Punkte der Curve die Tangente leicht construiren.

Die Länge des Krümmungshalbmessers wird $= \frac{r(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi(\varphi^2+2)} = \frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}$.

Dieser letztere Ausdruck lässt sich leicht construiren.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts sind

$$Y = \frac{r[\varphi.\sin\varphi + (1+\varphi^2).\cos\varphi]}{\varphi(\varphi^2+2)},$$

$$X = \frac{r[\varphi.\cos\varphi - (1+\varphi^2).\sin\varphi]}{\varphi(\varphi^2+2)}.$$

Je grösser φ wird, um so mehr nähern sich diese Grössen den Werthen

$$Y = a\cos\varphi,$$

$$X = -a\sin\varphi,$$

woraus folgt $$X^2 + Y^2 = a^2,$$

d. h. die Evolute der archimedischen Spirale nähert sich asymptotisch dem Kreise, dessen Mittelpunkt der Pol und dessen Radius $= a$ ist.

40) Aufg. Untersuchung der hyperbolischen Spirale.

Lös. Die Gleichung der hyperbolischen Spirale ist

$$r\varphi = a.$$

Beschreibt man demnach um den Pol als Centrum eine Schaar von Kreisen und trägt auf dieselben von der Polaraxe aus nach derselben Seite hin Bogen von der Länge a ab, so ist der geometrische Ort der Endpunkte eine hyperbolische Spirale. Für dieselbe ist der Pol ein asymptotischer Punkt, um welchen die Curve unendlich viele Windungen macht, ohne ihn für endliche Werthe von φ je zu erreichen.

Es wird $$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a}{\varphi^2},$$

$$\varrho = \frac{r(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^3} = r\left(\frac{r^2+a^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{r}{\cos^3 OTP},$$

wenn O den Pol, P den Curvenpunkt und T den Schnittpunkt der Tangente mit dem in O auf den Radius vector gefällten Perpendikel bezeichnet. Der letztere Ausdruck ist leicht zu construiren.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden

$$Y = -\frac{r[\varphi.\sin\varphi + (1+\varphi^2).\cos\varphi]}{\varphi^3},$$

$$X = -\frac{r[\varphi.\cos\varphi - (1+\varphi^2).\sin\varphi]}{\varphi^3}.$$

Ferner ist $\mathfrak{S}_t = -a,\ \mathfrak{S}_n = -\frac{r}{\varphi} = -\frac{r^2}{a}.$

Errichtet man im Pol Senkrechten auf die Leitstrahlen und bringt dieselben zum Schnitt mit den zugehörigen Tangenten, so ist der Ort der Schnittpunkte ein Kreis vom Radius a, dessen Mittelpunkt der Pol ist.

Damit die Curve eine Asymptote habe, muss die Subtangente $\frac{r^2 d\varphi}{dr}$ für ein unendlich gross werdendes r einen endlichen Werth haben; sie wird aber $= -a$, und da zugleich für ein unendlich grosses r aus der Gleichung der Curve sich $\varphi = 0$ ergibt, so folgt, dass die hyperbolische Spirale eine Asymptote hat, die mit der XAxe oder mit der Linie, von welcher ab die Winkel φ gezählt werden, parallel geht und zwar in der Entfernung a.

41) Aufg. Es soll die parabolische Spirale untersucht werden.

Lös. Die parabolische Spirale hat die Gleichung

$$r^2 = a^2.\varphi.$$

Der Name der Curve rührt daher, dass dieselbe in Beziehung auf die Peripherie des Kreises vom Radius 1 als Abscissenaxe und die nach dem Centrum gerichteten Normalen als Ordinaten nach demselben Gesetze construirt wird, wie die gewöhnliche Parabel.

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a^2}{2r} = \frac{a}{2\sqrt{\varphi}}, \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = -\frac{a}{4\varphi^{\frac{3}{2}}} = -\frac{r}{4\varphi^2};$$

$$\varrho = \frac{r(1+4\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2\varphi.(3+4\varphi^2)}.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts:

$$Y = \frac{r.[4\varphi.\sin\varphi + (1+4\varphi^2).\cos\varphi]}{2\varphi.(3+4\varphi^2)},$$

$$X = \frac{r.[4\varphi.\cos\varphi - (1+4\varphi^2).\sin\varphi]}{2\varphi.(3+4\varphi^2)}.$$

Die Länge der Polarsubtangente wird $= 2a\varphi^{\frac{3}{2}} = \frac{2r^3}{a^2}$;

" " " Polarsubnormale " $= \frac{a}{2\sqrt{\varphi}} = \frac{a^2}{2r}$.

42) Aufg. Untersuchung der Spiralen im Allgemeinen.

Lös. Die in den drei letzten Aufgaben genannten Spiralen sind Specialfälle derjenigen Curven, welche zu ihrer gemeinsamen Gleichung $r = a.\varphi^n$ haben. Für diese ist

die Polarsubtangente $= r^2.\frac{d\varphi}{dr} = \frac{a}{n}\varphi^{n+1}$,

" Polartangente $= r.\sqrt{1+r^2.\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} = \frac{a}{n}.\varphi^n.\sqrt{n^2+\varphi^2}$,

" Polarsubnormale $= \frac{dr}{d\varphi} = n.a.\varphi^{n-1}$,

" Polarnormale $= \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} = a.\varphi^{n-1}.\sqrt{n^2+\varphi^2}$.

$$\varrho = \frac{r.(n^2+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi.(\varphi^2+n^2+n)}.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts

$$Y = \frac{n.r.[\varphi.\sin\varphi + (n^2+\varphi^2).\cos\varphi]}{\varphi.(\varphi^2+n^2+n)},$$

$$X = \frac{n.r.[\varphi.\cos\varphi - (n^2+\varphi^2).\sin\varphi]}{\varphi.(\varphi^2+n^2+n)}.$$

43) Aufg. Untersuchung der logarithmischen Spirale.

Lös. Diese Spirale ist nicht unter den bisher behandelten mitbegriffen, sondern unterscheidet sich von diesen wesentlich dadurch, dass in ihrer Gleichung die Abweichung φ als Exponent einer constanten Basis erscheint, während in den Gleichungen der früheren Spiralen diese Abweichung zu einer Potenz mit constantem Exponenten erhoben wurde. Die Gleichung der Curve ist

$$r = a^\varphi,$$

und es wächst daher der Radius vector in geometrischer Proportion, während die Abweichung arithmetisch fortschreitet.

Aus der Curvengleichung folgt:

$$\frac{dr}{d\varphi} = l\,a\,.\,a^{\varphi}\,, \qquad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = (l\,a)^2.\,a^{\varphi}\,,$$

oder

$$\frac{dr}{d\varphi} = k\,.\,a^{\varphi} = kr, \qquad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = k^2\,.\,a^{\varphi} = k^2 r\,,$$

wenn man mit k den natürlichen Logarithmus von a bezeichnet.

Die Länge der Polarsubtangente wird $= \frac{1}{k}\cdot r$,

" " " Polartangente " $= \frac{r}{k}\sqrt{1+k^2}$,

" " " Polarsubnormale " $= k.r$,

" " " Polarnormale " $= r.\sqrt{1+k^2}$.

Aus diesen Gleichungen folgt, dass sowohl der Ort der zweiten Endpunkte (den Pol als ersten Endpunkt betrachtet) der Polarsubnormalen, als auch der Polarsubtangenten wieder eine logarithmische Spirale ist, welche der ursprünglichen congruent, aber gegen dieselbe um einen bestimmten Winkel gedreht ist.

Die trigonometrische Tangente des Winkels ϑ, den die Tangente mit dem Radius vector des Berührungspunktes bildet, ist $= \frac{1}{k}$, also constant.

Die Länge des Krümmungshalbmessers wird $= r.\sqrt{1+k^2} = \mathfrak{R}$. Da $\varrho = \mathfrak{R}$, so stimmt die Evolute der logarithmischen Spirale mit dem soeben erwähnten geometrischen Ort der zweiten Endpunkte der Polarnormalen überein. Man findet übrigens als

Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts $\begin{cases} Y = k.a^{\varphi}.\cos\varphi, \\ X = -k.a^{\varphi}.\sin\varphi. \end{cases}$

Die Gleichung der Evolute wird $\frac{1}{k}\cdot l\left(\frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{k}\right) = \text{arc tang}\left(-\frac{X}{Y}\right)$,

oder wenn man $Y = r'.\cos\varphi'$ und $X = r'.\sin\varphi'$ setzt, $r' = k.a^{2\pi-\varphi'}$ oder noch einfacher, wenn man $Y = k\nu'.\cos\psi'$ und $X = k\nu'.\sin\psi'$ setzt: $\nu' = a^{\psi'}$.

Diess ist in der That die Gleichung einer logarithmischen Spirale, welche der vorgelegten congruent ist. (Vergl. Aufg. 24).*)

44) Aufg. Untersuchung der Kettenlinie.

Lös. Denkt man sich eine vollkommen biegsame, aber schwere Linie in ihren beiden Endpunkten an zwei Punkten befestigt, aber so, dass sie nicht gespannt ist, so bildet sie bekanntlich die Kettenlinie. Die Gleichung der Kettenlinie ist

$$y = \tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right); \qquad x = m\,l\,\frac{y \pm \sqrt{y^2 - m^2}}{m}.$$

Für $x = 0$, wird $y = m$.

Es ist

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = \frac{1}{m}\sqrt{y^2 - m^2}; \ \cos\alpha = \frac{m}{y}.$$

Hieraus ergibt sich leicht eine Tangentenconstruction.

Ferner wird $ds = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)dx$;

$$S_t = \frac{m\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}, \qquad T = \frac{m}{2}\,\frac{\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)^2}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}},$$

$$S_n = \frac{m}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}\right), \qquad N = \frac{m}{4}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)^2;$$

$$\varrho = N;$$

$$Y = m\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right), \qquad X = x - \tfrac{1}{4}m\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}\right).$$

Die Gleichung der Evolute wird

$$X = ml\,\frac{Y \pm \sqrt{Y^2 - 4m^2}}{2m} \mp \frac{Y\sqrt{Y^2 - 4m^2}}{4m}.$$

Ueber die Gleichung der Kettenlinie sehe man nach: Theorie der Potentialfunctionen von *Gudermann*, Berlin 1833. S. 84.

45) Aufg. Untersuchung der gedehnten und verkürzten Cycloide.

*) Die logarithmische Spirale liess sich der 1705 verstorbene Jac. Bernoulli auf seinen Grabstein setzen mit der Inschrift: „Eadem mutata resurgo," um der Nachwelt nicht nur eine seiner schönsten Arbeiten, sondern auch seinen Glauben an die Unsterblichkeit der Seele in Erinnerung zu bringen.

Lös. Wenn auf einer festen Geraden ein Kreis rollt, so beschreibt ein Punkt P_1, der auf einem bestimmten Radius innerhalb des Kreises liegt, eine gedehnte, und ein Punkt P_2, der auf der Verlängerung dieses Radius liegt, eine verkürzte Cycloide.*) Denkt man sich nun den rollenden Kreis zuerst in einer solchen Lage, dass der Radius, auf welchem der beschreibende Punkt liegt, senkrecht auf der zur Basis dienenden Geraden steht, so wähle man den verlängerten Radius in dieser Lage zur Ordinaten-, die Basis selbst zur Abscissen- oder XAxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Nennt man alsdann bei irgend einer Lage des gerollten Kreises den Winkel zwischen dem Radius mit dem beschreibenden Punkte und dem mit der XAxe parallelen Radius φ, so erhält man für die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve

$$x = r\varphi - (r \mp d)\sin\varphi,$$
$$y = r - (r \mp d)\cos\varphi,$$

wo $(r \mp d)$ die Entfernung des beschreibenden Punktes vom Centrum des beweglichen Kreises bedeutet. Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Grösse φ, so folgt als Gleichung der Curve

$$x = \arccos\frac{r-y}{r \mp d} - \sqrt{(2r \mp d - y)(y \mp d)}.$$

Zur Abkürzung werde gesetzt $r \mp d = a$; dann wird

$$\frac{dx}{d\varphi} = r - a\cos\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = a\sin\varphi.$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, dass die Normale im Punkte P durch den diesem Punkte entsprechenden Berührungspunkt des rollenden Kreises mit der Basis geht. (Vergl. Aufg. 11). In der That ist die Länge der Normale $\qquad N = \sqrt{r^2 - 2ra\cos\varphi + a^2}$

gleich der Länge einer Dreieckseite, wenn die beiden andern Dreieckseiten r und a sind und den Winkel φ einschliessen.

Der Krümmungsradius ist $\varrho = \dfrac{(r^2 - 2ra\cos\varphi + a^2)^{\frac{3}{2}}}{a(r\cos\varphi - a)}$.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

---

*) *Weissenborn* nennt in seiner interessanten Schrift: „Die cyklischen Curven", Eisenach 1856, die gedehnte Cykloide „verkürzte", die verkürzte „verlängerte."

$$X = r\varphi + r\sin\varphi \frac{r - a\cos\varphi}{a - r\cos\varphi},$$

$$Y = \frac{r(r - a\cos\varphi)^2}{a(r\cos\varphi - a)}.$$

46) Aufg. Untersuchung der einfachen Epicycloide und Hypocycloide.

Lös. Wenn die Basis, auf der ein Kreis rollt, nicht eine gerade Linie, sondern wieder ein andrer Kreis ist, so beschreibt ein bestimmter Punkt des rollenden Kreises eine Curve, die Epicycloide oder Hypocycloide genannt wird, je nachdem jener Kreis auf der äussern oder innern Seite des festen Kreises rollt, d. h. je nachdem die beiden Kreise sich von aussen oder von innen berühren*). Denkt man sich nun zunächst bei der Epicycloide die beiden Kreise in solcher Lage, dass der für die Beschreibung der Curve auf der Peripherie des rollenden Kreises befindliche Punkt in der Peripherie des festen Kreises liegt, so soll der von hier ausgehende Durchmesser des festen Kreises zur X Axe und der Mittelpunkt desselben zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen werden. Der Radius des festen Kreises heisse r, der des rollenden ϱ. Für irgend eine von der Anfangslage verschiedene Lage des rollenden Kreises werde noch der Winkel, der von der Centrallinie beider Kreise und von der X Axe gebildet wird, mit φ bezeichnet; dann wird die Epicycloide durch das System folgender beiden Gleichungen dargestellt:

$$x = (r + \varrho).\cos\varphi - \varrho.\cos\frac{r + \varrho}{\varrho}\varphi,$$

$$y = (r + \varrho).\sin\varphi - \varrho.\sin\frac{r + \varrho}{\varrho}\varphi.$$

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Hypocycloide ergeben sich aus diesen Gleichungen, wenn man $-\varrho$ an die Stelle von ϱ setzt, nämlich:

---

*) *Weissenborn* macht in der oben angeführten Schrift „die cyklischen Curven" bei der innern Berührung der beiden Kreise einen Unterschied, je nachdem der feste oder der rollende Kreis der grössere ist und nennt hiernach die Curve „Hypercycloide" oder „Pericycloide."

$$x = (r - \varrho).\cos\varphi + \varrho.\cos\frac{r-\varrho}{\varrho}\varphi,$$

$$y = (r - \varrho).\sin\varphi - \varrho.\sin\frac{r-\varrho}{\varrho}\varphi.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, dass die Hypocycloide r, ϱ identisch ist mit der Hypocycloide $r, r-\varrho$ oder mit der Epicycloide $r, \varrho - r$, je nachdem $\varrho \lesseqgtr r$ ist.

In allen nächsten Formeln bezieht sich das obere Zeichen auf die Epicycloide, das untere dagegen auf die Hypocycloide.

Es wird

$$\frac{dx}{d\varphi} = -(r \pm \varrho).\sin\varphi \pm (r \pm \varrho).\sin\frac{r\pm\varrho}{\varrho}\varphi =$$

$$= \pm 2(r \pm \varrho).\cos\frac{r\pm 2\varrho}{2\varrho}\varphi.\sin\frac{r}{2\varrho}\varphi = \pm\frac{r\pm\varrho}{\varrho}(r.\sin\varphi - y),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = (r \pm \varrho).\cos\varphi - (r \pm \varrho).\cos\frac{r\pm\varrho}{\varrho}\varphi =$$

$$= 2(r \pm \varrho).\sin\frac{r\pm 2\varrho}{2\varrho}\varphi.\sin\frac{r}{2\varrho}\varphi = \pm\frac{r\pm\varrho}{\varrho}(-r.\cos\varphi + x).$$

Die Normale in irgend einem Punkte der Curve geht durch den entsprechenden Berührungspunkt des rollenden mit dem Basiskreise. (Vergl. Aufg. 11). Aus den vorstehenden Gleichungen folgt

$$\tang\alpha = \frac{dy}{dx} = \pm\tang\frac{r\pm 2\varrho}{2\varrho}\varphi = -\frac{r\cos\varphi - x}{r\sin\varphi - y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r\pm 2\varrho}{4\varrho(r\pm\varrho)}\cdot\frac{1}{\left(\cos\frac{r\pm 2\varrho}{2\varrho}\varphi\right)^3\sin\frac{r}{2\varrho}\varphi}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{4\varrho(r\pm\varrho)}{r\pm 2\varrho}\sin\frac{r}{2\varrho}\varphi.$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden

$$Y = \frac{r}{r\pm 2\varrho}\left[(r\pm\varrho)\sin\varphi + \varrho\sin\frac{r\pm\varrho}{\varrho}\varphi\right],$$

$$X = \frac{r}{r\pm 2\varrho}\left[(r\pm\varrho)\cos\varphi \pm \varrho\cos\frac{r\pm\varrho}{\varrho}\varphi\right].$$

Das System dieser beiden Gleichungen stellt die Evolute dar, welche offenbar wieder respective eine Epicycloide oder Hypocycloide ist. Um diese Gleichungen auf die Form der oben gegebenen Gleichungen zurückzuführen, setze man

$$Y = Y'.\cos\frac{\varrho\pi}{r} \pm X'.\sin\frac{\varrho\pi}{r}, \qquad X = \mp Y'.\sin\frac{\varrho\pi}{r} + X'.\cos\frac{\varrho\pi}{r},$$

$$\varphi = \varphi' \pm \frac{\varrho\pi}{r}, \qquad r = r' \pm 2\varrho', \qquad \varrho = \varrho'\frac{r' \pm 2\varrho'}{r'};$$

dann wird

$$X' = (r' \pm \varrho').\cos\varphi' \mp \varrho'.\cos\frac{r' \pm \varrho'}{\varrho'}\varphi',$$

$$Y' = (r' \pm \varrho').\sin\varphi' - \varrho'.\sin\frac{r' \pm \varrho'}{\varrho'}\varphi'.$$

Hierbei ist zu bemerken, dass $\frac{r'}{\varrho'} = \frac{r}{\varrho}$ d. h. dass das Verhältniss des Radius des rollenden Kreises zu dem des festen Kreises bei der Epi- und Hypocycloide dasselbe ist, wie das der Kreise, die ihre Evoluten erzeugen.

Anm. Da der Punkt des rollenden Kreises, welcher beim Anfang der Bewegung auf der Peripherie der Basis lag, bei der beständig fortgesetzten Bewegung unendlich oft wieder die Peripherie der Basis treffen muss, so wird die Curve aus unendlich vielen unter sich congruenten Zügen bestehen, die nur dann zu einem gewissen Abschluss kommen werden, wenn das Verhältniss der Radien r und ϱ beider Kreise ein rationales ist, weil alsdann der beschreibende Punkt nach einer hinreichenden Anzahl von Revolutionen wieder an dieselbe Stelle gelangen wird, von welcher er ausgegangen ist. Ueberall da, wo der beschreibende Punkt auf die Peripherie der Basis gelangt, besitzt die Curve eine Spitze erster Art. — Einzelne Beispiele von rationalen Verhältnissen der Radien beider Kreise mögen hier folgen.

a) Wenn die beiden Radien einander gleich sind, also $\varrho = r$, so entsteht als Epicycloide die sogenannte Cardioide.

Ein beliebiger Punkt derselben ist nach dem Vorhergehenden bestimmt durch die Gleichungen

$$x = 2r\cos\varphi - r\cos 2\varphi,$$

$$y = 2r\sin\varphi - r\sin 2\varphi.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dx}{d\varphi} = -2r\sin\varphi + 2r\sin 2\varphi = 4r\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin\tfrac{3}{2}\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = 2r\cos\varphi - 2r\cos 2\varphi = 4r\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin\tfrac{3}{2}\varphi,$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\tfrac{3}{2}\varphi, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{8r(\cos\frac{3}{2}\varphi)^3\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Da y mit φ sein Zeichen wechselt, x dagegen nicht, so ist die Curve symmetrisch in Bezug auf die X Axe.

Der höchste Punkt $x = -\frac{1}{2}r$, $y = \frac{3}{2}r\sqrt{2}$ ergibt sich für $\varphi = \frac{2}{3}\pi$,
der tiefste $x = -\frac{1}{2}r$, $y = -\frac{3}{2}r\sqrt{2}$ für $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$.

Für $\varphi = 0$ wird $x = r$, $y = 0$, und da für diesen Punkt die Tangente mit der X Axe zusammenfällt, so ist er ein Rückkehrpunkt der ersten Art. Die Punkte ($\varphi = \pi$) $x = -3r$, $y = 0$ und ($\varphi = \pm\frac{1}{3}\pi$) $x = \frac{3}{2}r$, $y = \pm\frac{1}{2}r\sqrt{2}$ sind am weitesten von der Y Axe entfernt; in denselben sind die Tangenten der Y Axe parallel.

Eliminirt man aus den Gleichungen für x und y die Grösse φ, so ergibt sich: $(x^2+y^2)^2 - 6r^2(x^2+y^2) + 8r^3x - 3r^4 = 0.$
Für diese Gleichung lag der Anfangspunkt der Coordinaten in dem Mittelpunkte des festen Kreises; verlegt man ihn aber nach der Peripherie des Kreises, indem man $r - \xi$ für x setzt, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$(\xi^2 + y^2)^2 - 4r\xi(\xi^2 + y^2) - 4r^2y^2 = 0;$$

oder endlich, wenn man die gewöhnlichen Polarcoordinaten, also $y = u.\sin t$ und $\xi = u.\cos t$ einführt

$$u = 2r(1 + \cos t).$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass zwei radii vectores, die entgegengesetzt gerichtet sind, sich zu $2r$ ergänzen.

Ferner ist $\operatorname{tang}\vartheta = -\operatorname{cotg}\frac{t}{2}$, folglich $\vartheta = 90^0 + \frac{t}{2}$.

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{8}{3}r.\sin\frac{1}{2}\varphi$.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden

$$Y = \tfrac{1}{3}r(2\sin\varphi + \sin 2\varphi), \qquad X = \tfrac{1}{3}r(2\cos\varphi + \cos 2\varphi).$$

Durch diese Gleichungen ist zugleich die Evolute bestimmt.

Setzt man $Y = -Y'$, $X = -X'$, $\varphi = \varphi' + \pi$, so wird

$$Y' = \tfrac{1}{3}r(2\sin\varphi' - \sin 2\varphi'), \qquad X' = \tfrac{1}{3}r(2\cos\varphi' - \cos 2\varphi').$$

Diese Gleichungen stellen eine neue Cardioide dar, in welcher sowohl der Radius des festen Kreises, als der des rollenden der dritte Theil von dem ursprünglichen Radius ist.

b) Wenn der Radius des rollenden Kreises die Hälfte von dem des festen ist, also $\varrho = \frac{1}{2}r$, so wird ein beliebiger Punkt der Epicycloide gegeben durch die Gleichungen

$$x = \tfrac{3}{2}r\cos\varphi - \tfrac{1}{2}r\cos 3\varphi, \qquad y = \tfrac{3}{2}r\sin\varphi - \tfrac{1}{2}r\sin 3\varphi.$$

Wenn man $\cos 3\varphi$ und $\sin 3\varphi$ durch den einfachen Winkel ausdrückt und dann φ eliminirt, so erhält man als Gleichung der Curve

$$4(x^2 + y^2 - r^2)^3 = 27r^4y^2.$$

Es wird $\frac{dx}{d\varphi} = 3r\cos 2\varphi.\sin\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = 3r\sin 2\varphi.\sin\varphi,$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} 2\varphi, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{3r(\cos 2\varphi)^3.\sin\varphi}.$$

Der Krümmungshalbmesser ϱ wird $= \frac{3}{2}r\sin\varphi$.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden

$$Y = \tfrac{1}{2}r(\tfrac{3}{2}\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\sin 3\varphi), \qquad X = \tfrac{1}{2}r(\tfrac{3}{2}\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 3\varphi).$$

Die Gleichung der Evolute, welche durch die Elimination des Winkels φ aus diesen beiden Gleichungen erhalten wird, lautet:

$$(4Y^2 + 4X^2 - r^2)^3 = 27r^4X^2.$$

Setzt man $r = 2r'$, $\varphi = \varphi' + \frac{1}{2}\pi$, $Y = X'$, $X = -Y'$, so nehmen die vorangehenden drei Gleichungen folgende Gestalt an:

$$X' = r'(\tfrac{3}{2}\cos\varphi' - \tfrac{1}{2}\cos 3\varphi'), \qquad Y' = r'(\tfrac{3}{2}\sin\varphi' - \tfrac{1}{2}\sin 3\varphi')$$

und $$4(X'^2 + Y'^2 - r'^2)^3 = 27r'^4Y'^2.$$

Diese Gleichungen stellen eine Epicycloide dar, welche der gegebenen ähnlich ist und bei welcher der Radius des festen Kreises halb so gross ist, als der Radius des ursprünglich gegebenen festen Kreises.

c) Wenn der Radius des rollenden Kreises wieder halb so gross ist, als der Radius des festen, der bewegliche Kreis aber innerhalb des festen rollt, so wird jeder Punkt der Hypocycloide bestimmt durch:

$$x = r\cos\varphi; \qquad y = 0,$$

d. h. die Curve wird die Abscissenaxe, also ein Durchmesser des festen Kreises.

d) Wenn der Radius des rollenden Kreises der dritte Theil vom Radius des festen Kreises ist, so ist die Epicycloide gegeben durch die Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{3}r(4\cos\varphi - \cos 4\varphi), \qquad y = \tfrac{1}{3}r(4\sin\varphi - \sin 4\varphi);$$

ferner wird $\frac{dx}{d\varphi} = \tfrac{8}{3}r.\cos\tfrac{5}{2}\varphi.\sin\tfrac{3}{2}\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \tfrac{8}{3}r.\sin\tfrac{5}{2}\varphi.\sin\tfrac{3}{2}\varphi,$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\tfrac{5}{2}\varphi, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{15}{16r(\cos\tfrac{5}{2}\varphi)^3.\sin\tfrac{3}{2}\varphi}.$$

Der Krümmungshalbmesser ϱ wird $= \tfrac{16}{15}r\sin\tfrac{3}{2}\varphi$.

$$Y = \tfrac{1}{5}r(4\sin\varphi + \sin 4\varphi), \qquad X = \tfrac{1}{5}r(4\cos\varphi + \cos 4\varphi),$$

welche Gleichungen die Evolute darstellen.

Durch die Substitution

$$Y = \tfrac{1}{2}Y' + \tfrac{1}{2}.\sqrt{3}.X', \qquad X = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.Y' + \tfrac{1}{2}X',$$

$$\varphi = \varphi' + \tfrac{1}{3}\pi, \qquad r = \tfrac{5}{3}r',$$

nehmen sie die Gestalt der gegebenen Gleichungen an.

$$X' = \tfrac{1}{3}r'(4\cos\varphi' - \cos 4\varphi'), \qquad Y' = \tfrac{1}{3}r'(4\sin\varphi' - \sin 4\varphi').$$

e) Wenn wieder der Radius des rollenden Kreises der dritte Theil von dem Radius des festen Kreises ist, der erste aber auf der innern Seite des letztern rollt, so wird die Hypocycloide dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{3}r(2\cos\varphi + \cos 2\varphi), \qquad y = \tfrac{1}{3}r(2\sin\varphi - \sin 2\varphi),$$

oder nach Elimination des Winkels φ durch die Gleichung

$$3(r^2 + x^2 + 4rx + y^2)^2 = 4r(r + 2x)^3.$$

Hierbei wird $\frac{dx}{d\varphi} = -\tfrac{4}{3}r\cos\tfrac{1}{2}\varphi.\sin\tfrac{3}{2}\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \tfrac{4}{3}r\sin\tfrac{1}{2}\varphi.\sin\tfrac{3}{2}\varphi,$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{8r(\cos\tfrac{1}{2}\varphi)^3.\sin\tfrac{3}{2}\varphi}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \tfrac{8}{3}r\sin\tfrac{3}{2}\varphi$.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden

$$Y = r.(2\sin\varphi + \sin 2\varphi), \qquad X = r.(2\cos\varphi - \cos 2\varphi).$$

Diese Gleichungen bestimmen jeden beliebigen Punkt der Evolute, welche wie in allen vorhergehenden Beispielen wieder eine der ursprünglichen ähnliche Curve ist.

f) Wenn der Radius des rollenden Kreises der vierte Theil vo

dem Radius des festen Kreises ist und der erstere auf der innern Seite des letzteren rollt, so wird die entstehende Hypocycloide (eine sogenannte Astroide) gegeben durch die beiden Gleichungen

$$x = r\cos^3\varphi,\quad y = r\sin^3\varphi,$$

oder nach Elimination der Grösse φ durch die eine Gleichung $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=r^{\frac{2}{3}}$. (Vergl. Aufg. 1 und 8.)

Hieraus folgt $\dfrac{dx}{d\varphi} = -3r\cos^2\varphi\sin\varphi,\qquad \dfrac{dy}{d\varphi} = 3r\sin^2\varphi\cos\varphi,$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang}\varphi.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass $\alpha = \pi - \varphi$, und es lässt sich somit die Tangente in jedem Punkte der Curve leicht construiren.

Ferner wird $\qquad ds = 3r\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi,$

$$\varrho = -3r\sin\varphi\cos\varphi = -\tfrac{3}{2}r\sin 2\varphi.$$

Die Evolute wird dargestellt durch die Gleichungen

$$X = r\cos\varphi(\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi),\qquad Y = r\sin\varphi(\sin^2\varphi+3\cos^2\varphi).$$

Setzt man $X = \dfrac{X'+Y'}{\sqrt{2}},\quad Y = \dfrac{X'-Y'}{\sqrt{2}},\quad \varphi = \psi + \dfrac{\pi}{4}$, so kommt:

$$X' = 2r\cos^3\psi,\quad Y' = 2r\sin^3\psi.$$

Es ist somit die Evolute der vorgelegten Curve ähnlich und entsteht dadurch, dass ein Kreis vom Radius $\frac{1}{2}r$ auf der innern Seite eines festen Kreises vom Radius $2r$ rollt.

Die vorgelegte Curve ist vollkommen symmetrisch in Bezug auf beide Coordinatenaxen; sie besitzt in den vier Punkten $x = \pm r$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = \pm r$ Spitzen erster Art, in welchen die X-, resp. YAxe die zugehörigen Tangenten sind.

47) Aufg. Es soll die gedehnte oder verkürzte Epicycloide und Hypocycloide untersucht werden.

Lös. Wenn wieder ein gegebener Kreis auf einem anderen gegebenen festen Kreise rollt und wenn mit diesem rollenden Kreise innerhalb oder ausserhalb seiner Peripherie ein Punkt fest verbunden gedacht wird, so beschreibt dieser Punkt eine Epicycloide oder Hypocycloide, je nachdem die Kreise sich von aussen oder von innen berühren, und zwar wird es eine gedehnte oder verkürzte Curve, je nachdem der

beschreibende Punkt innerhalb oder ausserhalb der Peripherie des bewegten Kreises liegt.

Wenn man sich zunächst die Kreise bei der Berührung von aussen in solcher gegenseitigen Lage denkt, dass die beiden Mittelpunkte und der beschreibende Punkt in einer geraden Linie liegen, jedoch so, dass der beschreibende Punkt nicht zwischen den beiden Mittelpunkten liegt; wenn man dann diese Linie zur X Axe annimmt und den Mittelpunkt des festen Kreises zum Anfangspunkt der rechtwinkeligen Coordinaten; wenn man ferner bei einer beliebigen Lage des rollenden Kreises den Winkel zwischen der Centrallinie beider Kreise mit der soeben genannten XAxe mit φ bezeichnet; wenn endlich der Radius des festen Kreises r und der des rollenden Kreises ϱ, sowie die Entfernung des beschreibenden Punktes von der Peripherie des rollenden Kreises und zwar von der Peripherie nach aussen gerechnet, d genannt wird, so wird ein beliebiger Punkt der verkürzten Epicycloide bestimmt durch die Gleichungen

$$x = (r+\varrho).\cos\varphi + (\varrho + d).\cos\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi,$$

$$y = (r+\varrho).\sin\varphi + (\varrho + d).\sin\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi.$$

Für die gedehnte Epicycloide wird

$$x = (r+\varrho).\cos\varphi + (\varrho - d).\cos\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi,$$

$$y = (r+\varrho).\sin\varphi + (\varrho - d).\sin\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi.$$

Indem man nun beide Epicycloiden zusammenfasst erhält man

$$\frac{dx}{d\varphi} = -(r+\varrho).(\sin\varphi + \frac{\varrho \pm d}{\varrho}\sin\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = (r+\varrho).(\cos\varphi + \frac{\varrho \pm d}{\varrho}\cos\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi);$$

ferner

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varrho\cos\varphi + (\varrho \pm d).\cos\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi}{\varrho\sin\varphi + (\varrho \pm d).\sin\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varrho^3 + (\varrho \pm d)^2(r+\varrho) + \varrho(\varrho \pm d)(r+2\varrho).\cos\frac{r}{\varrho}\varphi}{\varrho^3(r+\varrho).\left(\sin\varphi + \frac{\varrho \pm d}{\varrho}\cdot\sin\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi\right)^3}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$\frac{(r+\varrho)\left[d^2+4\varrho\,(\varrho\pm d)\left(\cos\frac{r\varphi}{2\varrho}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^3+(\varrho\pm d)^2(r+\varrho)+(\varrho\pm d)(r+2\varrho)\,\varrho\cos\frac{r}{\varrho}\,\varphi}.$$

Wenn man sich zweitens bei der Berührung von innen die beiden Kreise anfänglich in solcher gegenseitigen Lage denkt, dass wieder die beiden Mittelpunkte und der beschreibende Punkt in einer geraden Linie liegen, hier aber so, dass der beschreibende Punkt zwischen die beiden Mittelpunkte fällt, im Uebrigen aber die Coordinaten und die andern Bezeichnungen so wählt, wie vorhin bei der Epicycloide, so wird die Hypocycloide bestimmt durch die Gleichungen

$$x = (r-\varrho)\cos\varphi-(\varrho\pm d)\cos\frac{r-\varrho}{\varrho}\varphi,$$

$$y = (r-\varrho)\sin\varphi+(\varrho\pm d)\sin\frac{r-\varrho}{\varrho}\varphi,$$

wo das obere Zeichen für die verkürzte, das untere aber für die gedehnte Hypocycloide gültig ist.

Der Krümmungshalbmesser wird

$$\frac{(r-\varrho)\left[d^2+4\varrho(\varrho\pm d)\left(\cos\frac{r\varphi}{2\varrho}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^3-(\varrho\pm d)^2(r-\varrho)-(\varrho\pm d)(r-2\varrho)\,\varrho\cos\frac{r}{\varrho}\,\varphi}.$$

Die Ausdrücke für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts, bei der Epicycloide sowohl als bei der Hypocycloide, werden so ungefügig, dass die Mühe ihrer Ausrechnung nicht belohnt wird.

Auch hier mögen einzelne Beispiele folgen.

a) Wenn die Entfernung d des beschreibenden Punktes von der Peripherie des rollenden Kreises gleich dem Radius des rollenden und gleich dem des festen Kreises ist, also $d=\varrho=r$, so soll die verkürzte Epicycloide untersucht werden.

Die Curve wird dargestellt durch die Gleichungen

$$x = 2r.(\cos\varphi+\cos 2\varphi),\qquad y = 2r.(\sin\varphi+\sin 2\varphi);$$

oder durch die Gleichung $(x^2+y^2)^2-12r^2(x^2+y^2)=16r^3x$,

$$y = \pm\sqrt{6r^2-x^2\pm 2r\sqrt{9r^2+4rx}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\varphi + 2\cos 2\varphi}{\sin\varphi + 2\sin 2\varphi} = \frac{4r^3 + 6r^2x - x(x^2+y^2)}{y(x^2+y^2) - 6r^2y}$$
$$= \frac{2r^2 \mp x\sqrt{9r^2+4rx}}{\pm y\sqrt{9r^2+4rx}},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3(3+2\cos\varphi)}{2r(\sin\varphi + 2\sin 2\varphi)^3}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \dfrac{2r(5+4\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3(3+2\cos\varphi)}$;

$$Y = \frac{8r.\sin^3\varphi}{3(3+2\cos\varphi)}, \quad X = \frac{2r(1+6\cos\varphi - 4\cos^3\varphi)}{3(3+2\cos\varphi)}.$$

Die Curve hat eine Schleife, welche von $x = 0$ bis $x = -2r$ reicht; in dem Punkte $x = -2r$, $y = 0$ schneiden sich zwei Aeste der Curve, deren Richtungen gegeben sind durch $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{3}$. ($\varphi = \frac{2}{3}\pi$ und $= \frac{4}{3}\pi$).

b) Wenn der Radius des rollenden Kreises halb so gross ist als der des festen, also $\varrho = \frac{1}{2}r$, das d aber noch beliebig, so wird die verkürzte Epicycloide dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \tfrac{3}{2}r.\cos\varphi + (\tfrac{1}{2}r + d).\cos 3\varphi, \quad y = \tfrac{3}{2}r.\sin\varphi + (\tfrac{1}{2}r + d).\sin 3\varphi.$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r.\cos\varphi + (r+2d).\cos 3\varphi}{r.\sin\varphi + (r+2d).\sin 3\varphi} =$$
$$= \operatorname{cotg}\varphi \cdot \frac{r + 3d - 2(r+2d)\cos^2\varphi}{2r + 3d - 2(r+2d)\sin^2\varphi},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{rd + 3d^2 + 2r(r+2d)\cos^2\varphi}{3\sin^3\varphi[d - 2(r+2d)\cos^2\varphi]^3}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \dfrac{3[d^2 + r(r+2d)\cos^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}{rd + 3d^2 + 2r(r+2d)\cos^2\varphi}$.

c) Wenn wieder der Radius des rollenden Kreises halb so gross ist, als der des festen, wenn sich die Kreise aber von innen berühren, so wird ein beliebiger Punkt der verkürzten Hypocycloide gegeben durch die Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2}r.\cos\varphi - (\tfrac{1}{2}r + d).\cos\varphi = -d.\cos\varphi,$$
$$y = \tfrac{1}{2}r.\sin\varphi + (\tfrac{1}{2}r + d).\sin\varphi = (r+d).\sin\varphi.$$

Die Gleichung der Curve wird

$$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{(r+d)^2} = 1,$$

d. h. es ist diese Hypocycloide eine Ellipse, deren halbe kleine Axe $= d$ und deren halbe grosse Axe $= r + d$ ist.

Wenn $d = 0$ wird, geht die Ellipse in denjenigen Durchmesser der Basis über, welcher in der Y Axe liegt.

d) Wenn der Radius des rollenden Kreises gleich dem der Basis, also $\varrho = r$ ist, so sucht man die gedehnte Epicycloide unter der Bedingung, dass der beschreibende Punkt innerhalb des rollenden Kreises liegt und um dessen halben Radius von der Peripherie entfernt ist, also $d = -\frac{1}{2}\varrho = -\frac{1}{2}r$.

Diese Curve wird dargestellt durch

$$x = \tfrac{1}{2}r(4\cos\varphi + \cos 2\varphi),$$
$$y = \tfrac{1}{2}r(4\sin\varphi + \sin 2\varphi) = r\sin\varphi\,(2 + \cos\varphi),$$

woraus
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\cos\varphi + \cos 2\varphi}{4\sin\varphi\,.\,(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \dfrac{r(5+4\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{12(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2}$.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts sind

$$Y = \tfrac{2}{3}r\,.\sin\varphi\,.\,(\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^2, \qquad X = r\cdot\frac{2 + 3\cos\varphi - 2\cos^3\varphi}{12(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2}.$$

e) Wenn die Kreise sich von aussen berühren und der Radius des rollenden Kreises doppelt so gross als der des festen Kreises, also $\varrho = 2r$, die Distanz des beschreibenden Punktes d aber gleich dem Radius der Basis r ist, so wird ein beliebiger Punkt der verkürzten Epicycloide gegeben durch

$$x = 3r\,.\,[\cos\varphi + \cos\tfrac{3}{2}\varphi] = 6r\,.\,\cos\tfrac{5}{4}\varphi\,.\,\cos\tfrac{1}{4}\varphi,$$
$$y = 3r\,.\,[\sin\varphi + \sin\tfrac{3}{2}\varphi] = 6r\,.\,\sin\tfrac{5}{4}\varphi\,.\,\cos\tfrac{1}{4}\varphi,$$

woraus
$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\tfrac{5}{4}\varphi.$$

Durch die Elimination des Winkels φ wird als Gleichung der Curve erhalten

$$(x^2 + y^2)\,.\,[(x^2 + y^2 - 18r^2)^2 - 9r^2(x^2 + y^2 - 9r^2)] = 486r^5x.$$

Also:
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\varphi + \frac{3}{2}\cos\frac{3}{2}\varphi}{\sin\varphi + \frac{3}{2}\sin\frac{3}{2}\varphi},$$

oder
$$\frac{dy}{dx} = \frac{243r^5 - x\,.\,[3(x^2 + y^2)^2 - 90r^2\,.\,(x^2 + y^2) + 405r^4]}{y\,[3(x^2 + y^2)^2 - 90r^2\,.\,(x^2 + y^2) + 405r^4]},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{5(7 + 6\cos\frac{1}{2}\varphi)}{24r\,.\,(\sin\varphi + \frac{3}{2}\sin\frac{3}{2}\varphi)^3}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \dfrac{3(13+12\cos\frac{1}{2}\varphi)^{\frac{3}{2}}}{5(7+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}\cdot r.$

Die Coordinaten des Krümmungshalbmessers werden

$$Y = \frac{12r.\sin^3\frac{1}{2}\varphi(1+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}{5(7+6\cos\frac{1}{2}\varphi)},$$

$$X = \frac{-3(9-6\cos\frac{1}{2}\varphi-36\cos^2\frac{1}{2}\varphi+4\cos^3\frac{1}{2}\varphi+24\cos^4\frac{1}{2}\varphi)}{5(7+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}r =$$

$$= \frac{6\cos\frac{1}{2}\varphi(2-\cos\varphi)+9(2\cos\varphi-\cos 2\varphi)}{5(7+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}\cdot r.$$

Die Curve schneidet die XAxe in vier Punkten, und zwar bei $x=0$, $x=6r$, $x=\frac{3}{2}r(-1\pm\sqrt{5})$. Von $x=0$ bis $x=\frac{3}{2}r(-1+\sqrt{5})$ bildet die Curve eine Schleife. Die beiden Punkte

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}r(-1+\sqrt{5}) \\ y=0 \\ (\varphi=\frac{8}{5}\pi \text{ und } = \frac{12}{5}\pi) \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}r(-1-\sqrt{5}) \\ y=0 \\ (\varphi=\frac{4}{5}\pi \text{ und } = \frac{16}{5}\pi) \end{array}\right\} \text{ sind Doppelpunkte;}$$

die Tangenten im ersten dieser Doppelpunkte sind bestimmt durch

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{5(5-2\sqrt{5})} = \pm 5\,\text{tang}\,18^0$$

und im zweiten durch

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} = \pm 5\,\text{cotg}\,36^0.$$

f) Wenn Alles wie in der vorigen Aufgabe bleibt, nur dass der beschreibende Punkt innerhalb der Peripherie des rollenden Kreises liegt, so hat man in der allgemeinen Gleichung der Epicycloide $\varrho = 2r$, $d=-r$ zu setzen und erhält für einen beliebigen Punkt der gedehnten Epicycloide

$$x = r.[3\cos\varphi+\cos\tfrac{3}{2}\varphi],$$
$$y = r.[3\sin\varphi+\sin\tfrac{3}{2}\varphi].$$

Die Gleichung der Curve wird

$$(x^2+y^2-7r^2)^3-27r^4(2x^2+2y^2-13r^2) = 54r^5x.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\cos\varphi+\cos\frac{3}{2}\varphi}{2\sin\varphi+\sin\frac{3}{2}\varphi},$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{27r^5-x.[3(x^2+y^2-7r^2)^2-54r^4]}{y.[3(x^2+y^2-7r^2)^2-54r^4]},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(11+10.\cos\frac{1}{2}\varphi)}{3r.(2\sin\varphi+\sin\frac{3}{2}\varphi)^3}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{3r.(5+4\cos\frac{1}{2}\varphi)^{\frac{3}{2}}}{11+10\cos\frac{1}{2}\varphi}$.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden

$$Y = \frac{4\sin^3\frac{1}{2}\varphi(1+2\cos\frac{1}{2}\varphi)}{11+10\cos\frac{1}{2}\varphi}.r$$

$$X = \frac{-3+6\cos\frac{1}{2}\varphi+12\cos^2\frac{1}{2}\varphi-4\cos^3\frac{1}{2}\varphi-8\cos^4\frac{1}{2}\varphi}{11+10\cos\frac{1}{2}\varphi}.r =$$

$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi(2-\cos\varphi)+2\cos\varphi-\cos 2\varphi}{11+10\cos\frac{1}{2}\varphi}.r.$$

Die Curve schneidet die X Axe in drei Punkten und zwar bei $x = 2r$, $x = 4r$ und $x = -\frac{1}{2}r(3+\sqrt{13})$. Der Punkt $\left\{\begin{matrix} x = -\frac{1}{2}r(3+\sqrt{13}) \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ ist ein Doppelpunkt; für denselben ist der wahre Werth des in unbestimmter Form erscheinenden Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{13(7+2\sqrt{13})}{3}}$.

Die Curve besitzt eine Schleife, welche sich erstreckt von $x = 2r$ bis $x = -\frac{1}{2}r(3+\sqrt{13})$.

g) Wenn der Radius des rollenden Kreises doppelt so gross ist, als der des festen, also $\varrho = 2r$, und wenn sich die Kreise beständig von innen berühren, so wird in diesem Fall der rollende Kreis den festen umschliessen. Die Entfernung des beschreibenden Punkts von der Peripherie des rollenden Kreises sei gleich dem Radius des festen und liege ausserhalb der Peripherie, dann wird ein beliebiger Punkt der verkürzten Hypocycloide bestimmt durch

$$x = 3r.\cos\tfrac{1}{2}\varphi - r.\cos\varphi,$$
$$y = 3r.\sin\tfrac{1}{2}\varphi - r.\sin\varphi.$$

Die Gleichung der Curve wird

$$[x^2+y^2-10r^2].[x^2+y^2-r^2]+18r^3(x-r) = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3\cos\frac{1}{2}\varphi-2\cos\varphi}{3\sin\frac{1}{2}\varphi-2\sin\varphi},$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9r^3+x[2(x^2+y^2)-11r^2]}{y[2(x^2+y^2)-11r^2]},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{17-18.\cos\frac{1}{2}\varphi}{r.(3\sin\frac{1}{2}\varphi-2\sin\varphi)^3}.$$

Die Länge des Krümmungshalbmessers wird $= \frac{r(13-12\cos\frac{1}{2}\varphi)^{\frac{3}{2}}}{17-18\cos\frac{1}{2}\varphi}$.

$$Y = \frac{12r.\sin^3\frac{1}{2}\varphi}{17-18\cos\frac{1}{2}\varphi},\qquad X = \frac{-3r(3-6\cos\frac{1}{2}\varphi+4\cos^3\frac{1}{2}\varphi)}{17-18\cos\frac{1}{2}\varphi}.$$

b) Wenn mit Beibehaltung derselben Bedingungen wie vorhin der beschreibende Punkt innerhalb der Peripherie des rollenden Kreises und wieder in der Entfernung $= r$ von der Peripherie liegt, so wird die gedehnte Hypocycloide dargestellt durch

$$x = -r\cos\varphi + r\cos\tfrac{1}{2}\varphi = 2r.\sin\tfrac{3}{4}\varphi.\sin\tfrac{1}{4}\varphi,$$
$$y = -r\sin\varphi + r\sin\tfrac{1}{2}\varphi = -2r.\cos\tfrac{3}{4}\varphi.\sin\tfrac{1}{4}\varphi,$$

oder zwischen rechtwinkeligen Coordinaten allein

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-3r^2)+2r^3x=0.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos\varphi+\cos\frac{1}{2}\varphi}{2\sin\varphi-\sin\frac{1}{2}\varphi} = \frac{-2\cos\varphi+\cos\frac{1}{2}\varphi}{2\sin\frac{1}{4}\varphi.\cos\frac{1}{4}\varphi.(4\cos\frac{1}{2}\varphi-1)},$$

oder $$\frac{dy}{dx} = \frac{r^3-x.[3r^2-2(x^2+y^2)]}{y.[3r^2-2(x^2+y^2)]},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(3-2\cos\frac{1}{2}\varphi)}{r.(2\sin\varphi-\sin\frac{1}{2}\varphi)^3}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{r(5-4\cos\frac{1}{2}\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3(3-2\cos\frac{1}{2}\varphi)}$.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden

$$Y = \frac{4r.\sin^3\frac{1}{2}\varphi}{3(3-2\cos\frac{1}{2}\varphi)},\qquad X = -\frac{r(1-6.\cos\frac{1}{2}\varphi+4\cos^3\frac{1}{2}\varphi)}{3(3-2\cos\frac{1}{2}\varphi)}.$$

Die XAxe wird von der Curve in drei Punkten geschnitten, bei $x=-2r$ $(\varphi=2\pi)$, bei $x=0$ $(\varphi=0)$ und bei $x=r$ $(\varphi=\frac{2}{3}\pi$ und $=\frac{10}{3}\pi)$. Der Punkt $\left\{\begin{matrix}x=r\\ y=0\end{matrix}\right\}$ ist ein Doppelpunkt; die Richtungen der beiden sich hier schneidenden Aeste sind gegeben durch $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{3}$. Auch hat die Curve eine Schleife in der Ausdehnung von $x=0$ bis $x=r$.

48) Aufg. Untersuchung der Kreisevolvente.

Lös. Wenn in dem Falle der gewöhnlichen Epicycloide der Radius des rollenden Kreises unendlich gross wird, so nennt man die entsprechende Roulette Kreisevolvente. Diese wird demnach durch einen beliebigen Punkt einer Geraden beschrieben, welche sich, ohne zu gleiten, auf

einem Kreise abwälzt. Wählt man die Verbindungsgerade des Kreismittelpunktes O mit dem Berührungspunkt der beweglichen Geraden in irgend einer ihrer Lagen zur X Axe, die in O darauf Senkrechte zur Y Axe, so erhält man für die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve die Gleichungen

$$x = r(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi),$$
$$y = r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$

wo r den Radius des festen Kreises und φ den Centriwinkel des abgewickelten Kreisbogens bezeichnet.

Hieraus folgt: $\frac{dx}{d\varphi} = r\varphi\cos\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = r\varphi\sin\varphi,$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi, \text{ also } \alpha = \varphi;$$
$$ds = r\varphi\, d\varphi, \quad \varrho = r\varphi.$$

Es ist also der Krümmungsradius gleich der Länge des abgewickelten Kreisbogens. Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X = r\cos\varphi, \quad Y = r\sin\varphi,$$

woraus $$X^2 + Y^2 = r^2.$$

Die Evolute der Kreisevolvente ist mithin, wie nach der Entstehungsweise der Curve zu erwarten war, der gegebene, feste Kreis.

49) Aufg. Es soll die Tractrix oder Tractoria von Huyghens untersucht werden.

Lös. Diese Curve hat die Eigenschaft, dass für jeden Punkt derselben das Stück der Tangente, gerechnet vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der X Axe, die constante Länge a hat. Demnach ist

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{\pm y}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

je nachdem x positiv oder negativ ist.

Die endliche Gleichung ist $\pm x = \sqrt{a^2-y^2} - al\left(\pm\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)$, je nachdem y positiv oder negativ ist.

Hierbei liegt der Anfangspunkt der Coordinaten in demjenigen Punkte, in welchem die Tangente der Curve die X Axe unter rechtem Winkel schneidet.

Ferner wird $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}$;

$$T = a, \qquad S_t = \sqrt{a^2-y^2},$$

$$N = \frac{ay}{\sqrt{a^2-y^2}}, \qquad S_n = \frac{y^2}{\sqrt{a^2-y^2}};$$

$$\varrho = a\,\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}.$$

$$X = \mp\, al\left(\pm\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right), \quad Y = \frac{a^2}{y}.$$

Die Gleichung der Evolute wird

$$Y = \pm\frac{a}{2}\left(e^{\frac{X}{a}} + e^{-\frac{X}{a}}\right).$$

Die Evolute besteht also aus zwei Kettenlinien, von welchen die eine über, die andere unter der Abscissenaxe liegt.

Die Curve hat vier Aeste, welche bei den Punkten $\begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases}$ und $\begin{cases} x = 0 \\ y = -a \end{cases}$ Rückkehrpunkte oder Spitzen der ersten Art bilden. Die X Axe ist zugleich Asymptote der Curve.

Enveloppen.

50) Aufg. Der Mittelpunkt eines veränderlichen Kreises bewegt sich auf der X Axe so, dass das Quadrat des Radius in jeder Lage gleich der zugehörigen Abscisse α des Mittelpunkts, multiplicirt in eine Constante m ist; es soll die Curve gefunden werden, welche alle diese beweglichen Kreise einhüllt.

Lös. Die Gleichung des Kreises in irgend einer Lage wird

$$y^2 + (x-\alpha)^2 - m\alpha = 0,$$

also der partielle nach α genommene Differentialquotient

$$-2(x-\alpha) - m = 0;$$

mithin die Gleichung der einhüllenden Curve

$$y^2 = mx + \tfrac{1}{4}m^2.$$

Die Enveloppe ist somit eine gewöhnliche appollonische Parabel.

51) Aufg. In den Endpunkten einer gegebenen geraden Linie ($= 2a$) sind zwei parallele Linien gezogen, und eine andere Gerade bewegt sich stets so, dass das Product der durch sie von den beiden

Parallelen abgeschnittenen Stücke einem gegebenen Quadrate k^2 gleich ist; es soll die einhüllende Curve dieser beweglichen Geraden gefunden werden.

Lös. Wenn die Richtung der gegebenen begrenzten Geraden zur X Axe und die durch ihre Mitte mit den beiden andern gegebenen Geraden parallel gezogene Linie zur Y Axe angenommen wird und wenn man bei einer bestimmten Lage der beweglichen Linie das Stück, welches sie von der Y Axe abschneidet, mit α bezeichnet, so werden die beiden Stücke, welche dieselbe von den beiden festen Ordinaten abschneidet,

$$y_1 = \alpha - c a; \quad y_2 = \alpha + c a,$$

wo c eine noch zu bestimmende Constante in der allgemeinen Gleichung $y - \alpha = cx$ der beweglichen Geraden ist. Aus der Bedingung $y_1 y_2 = \pm k^2$, folgt $c = \frac{\sqrt{\alpha^2 \mp k^2}}{a}$. Hier gilt das obere Zeichen, wenn die beiden Ordinatenabschnitte y_1 und y_2 beide auf einerlei Seite der Abscissenaxe liegen und das untere, wenn sie auf verschiedenen Seiten liegen. Durch Elimination der Grösse α aus

$$\alpha - y = \frac{x\sqrt{\alpha^2 \mp k^2}}{a} \text{ und } 1 = \frac{x \cdot \alpha}{a\sqrt{\alpha^2 \mp k^2}}$$

erhält man als Gleichung der einhüllenden Curve entweder

$$\frac{y^2}{k^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \text{ d. h. die Gleichung einer Ellipse,}$$

$$\text{oder } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{k^2} = 1, \text{ d. h. die Gleichung einer Hyperbel.}$$

52) Aufg. Eine gerade Linie bewegt sich so, dass sie mit zweien, unter gegebenem Winkel λ sich schneidenden Geraden Dreiecke bildet, die einen constanten Flächeninhalt k^2 haben; man sucht die einhüllende Curve dieser Geraden.

Lös. Nimmt man die beiden Schenkel des gegebenen Winkels zu Coordinatenaxen an und bezeichnet die Stücke, welche die bewegliche gerade Linie in einer ihrer Lagen von diesen Axen abschneidet, mit α und β, so ist die Gleichung dieser Linie

$$\frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} = 1,$$

oder, da die Fläche des abgeschnittenen Dreiecks $\frac{1}{2}\alpha\beta.\sin\lambda = k^2$ sein soll,

$$y.\alpha^2.\sin\lambda = 2k^2(\alpha - x).$$

Hieraus und aus den partiellen Differentialquotienten nach α, nämlich

$$y.\alpha.\sin\lambda - k^2 = 0,$$

erhält man nach Elimination von α als Gleichung der einhüllenden Curve

$$xy = \frac{k^2}{2.\sin\lambda},$$

welches die Gleichung einer Hyperbel ist, bei welcher die Coordinatenaxen, hier also die beiden gegebenen Geraden, Asymptoten sind.

53) Aufg. Man bestimme die Enveloppe aller concentrischen Ellipsen von gleichem Flächeninhalt πc^2, deren Axenrichtungen zusammenfallen.

Lös. Die gesuchte Curve hat die Gleichung $4x^2y^2 = c^4$.

54) Aufg. Eine gerade Linie von gegebener Länge k bewegt sich so, dass ihre Endpunkte beständig in zwei auf einander senkrecht stehenden festen Geraden liegen; es wird die einhüllende Curve dieser bewegten Linie gesucht.

Lös. Wenn man die festen Geraden zu Coordinatenaxen annimmt und die Stücke, welche von ihnen durch die bewegliche Gerade in einer ihrer Lagen abgeschnitten werden, mit α und β bezeichnet, so hat man

$$\frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} = 1, \quad \beta^2 + \alpha^2 = k^2;$$

$$\text{also} \quad \frac{y}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} + \frac{x}{\alpha} = 1.$$

Eliminirt man hieraus und aus den partiellen in Bezug auf α genommenen Differentialquotienten die Grösse α, so ergibt sich als Gleichung der einhüllenden Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

Anm. Diese Curve kann auch erhalten werden als Enveloppe concentrischer Ellipsen, welche die Axenrichtungen gemein haben und bei welchen die Summe der Halbaxen constant $= k$ ist.

Auf ein ähnliches Resultat, nämlich auf die Curve $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ führt folgende Aufgabe: Von jedem Punkte der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

werden Perpendikel auf die Axen gefällt und die Fusspunkte derselben durch Gerade verbunden; man bestimme die Enveloppe aller dieser Geraden.

Wird in dieser Aufgabe an Stelle der Ellipse ein Kreis gesetzt, d. h. ist $a = b = k$, so wird wieder obige Curve erhalten.

55) Aufg. Der Mittelpunkt eines Kreises von gegebenem Radius r bewegt sich auf einer gegebenen Curve $f(\alpha, \beta) = 0$ oder $\beta = \varphi(\alpha)$; man sucht die Curve, welche alle diese Kreise einhüllt.

Lös. Die Gleichung des Kreises wird

$$(x-\alpha)^2 + [y-\varphi(\alpha)]^2 - r^2 = 0,$$

und der in Bezug auf α genommene Differentialquotient

$$x-\alpha + [y-\varphi(\alpha)] \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = 0.$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen α eliminirt, so erhält man die Gleichung der gesuchten einhüllenden Curve.

Wäre z. B. als leitende Curve ein Kreis unter der Form $\beta = \sqrt{R^2 - \alpha^2}$ gegeben, so wäre die Gleichung der einhüllenden Curve

$$x^2 + y^2 = (R \pm r)^2,$$

d. h. die Enveloppe wäre ein concentrischer Kreis, dessen Radius die Summe oder Differenz der beiden gegebenen Radien ist.

Wäre als leitende Curve die gerade Linie $\beta = a\alpha + b$ gegeben, so wäre die Gleichung der den beweglichen Kreis einhüllenden Curve wieder die einer geraden Linie

$$y = ax + b \pm r\sqrt{1 + a^2}.$$

Aus den allgemeinen Gleichungen ergibt sich beiläufig noch:

$$x - \alpha = \pm \frac{r \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}}, \quad y - \beta = \mp \frac{r}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}},$$

und hieraus, wenn man beides nach α differentiirt, $\frac{dy}{dx} = \frac{d\beta}{d\alpha}$, d. h. die einhüllende Curve besitzt in jedem Punkte mit der eingehüllten eine gemeinsame Tangente.

56) Aufg. Der Mittelpunkt eines Kreises von variablem Radius bewegt sich auf einer gegebenen Curve, während die Peripherie desselben immer durch einen gegebenen festen Punkt geht. Es soll die einhüllende Curve des bewegten Kreises gefunden werden.

Lös. Wenn der feste Punkt zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen wird und die Coordinaten des Mittelpunkts des bewegten Kreises α und β sind, so wird die Gleichung dieses Kreises

$$y^2 + x^2 = 2\beta y + 2\alpha x.$$

Die Gleichung der leitenden Curve sei $f(\alpha, \beta) = 0$ oder $\beta = \varphi(\alpha)$; dann wird der Differentialquotient der vorigen Gleichung in Bezug auf α

$$y \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + x = 0,$$

aus welchen beiden Gleichungen man durch Elimination von α die gesuchte Gleichung der einhüllenden Curve erhält.

Wäre z. B. als leitende Curve ein Kreis mit dem Radius r und den Mittelpunktscoordinaten p und q gegeben, wäre also $(\beta - q)^2 + (\alpha - p)^2 = r^2$, so würde die Gleichung der einhüllenden Curve

$$(y^2 + x^2 - 2qy - 2px)^2 = 4r^2(x^2 + y^2),$$

und wenn man den Mittelpunkt des leitenden Kreises in den Anfangspunkt der Coordinaten selbst verlegt, also $p = 0$ und $q = 0$ setzt, so ergibt sich als einhüllende Curve

$$y^2 + x^2 = 4r^2,$$

d. h. ein dem ersten concentrischer Kreis, dessen Radius das Doppelte vom früheren ist.

Nähme man als leitende Curve eine Ellipse mit den beiden Halbaxen a und b, und den Mittelpunktscoordinaten p und q und denkt man sich die Coordinatenaxen parallel mit den Axen der Ellipse, so würde die Gleichung der den bewegten Kreis einhüllenden Curve

$$(y^2 + x^2 - 2qy - 2px)^2 = 4(b^2y^2 + a^2x^2).$$

Wenn hierbei der feste Punkt in einem Brennpunkt der Ellipse liegt, so ist die einhüllende Curve ein Kreis, dessen Mittelpunkt im zweiten Brennpunkt liegt und dessen Radius $= 2a$, also gleich der grossen Axe der Ellipse ist.

57) Aufg. Der Mittelpunkt einer beweglichen Ellipse mit den Halbaxen h und k bewegt sich auf einer andern Ellipse mit denselben Halbaxen, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfangspunkt ist. Welches ist die Envelöppe der beweglichen Ellipse?

Lös. $\frac{x^2}{(2h)^2}+\frac{y^2}{(2k)^2} = 1.$

58) Aufg. Man bestimme die Enveloppe der Geraden

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1,$$

wenn die variablen Parameter a und b mit den Constanten m und n durch die Gleichung

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n} = 1$$

verbunden sind.

Lös. $\sqrt{\frac{x}{m}}+\sqrt{\frac{y}{n}} = 1$. Die geometrische Interpretation dieses Problems ergibt eine bekannte Construction der Parabel als Enveloppe ihrer Tangenten.

59) Aufg. Von jedem Punkte der Ellipse $\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2} = 1$ werden Tangentenpaare an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ gezogen. Es wird die Enveloppe der Berührungssehnen (Polaren derjenigen Punkte, von denen aus die Tangenten gezogen sind) verlangt.

Lös. $\frac{h^2x^2}{a^4}+\frac{k^2y^2}{b^4} = 1.$

60) Aufg. Man bestimme die Enveloppe der Berührungssehnen aller derjenigen Tangentenpaare an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, welche auf einander senkrecht stehen.

Lös. Bedenkt man, dass der geometrische Ort derjenigen Punkte, von welchen aus sich Tangenten an die gegebene Ellipse ziehen lassen, die aufeinander senkrecht stehen, der Kreis $x^2+y^2 = a^2+b^2$ ist, so erhält man durch die Substitution $h = k = \sqrt{a^2+b^2}$ in die vorhergehende Aufgabe als Lösung die der gegebenen confocale Ellipse $\frac{a^2+b^2}{a^4}x^2 +$ $+ \frac{a^2+b^2}{b^4}y^2 = 1.$

61) **Aufg.** Es soll die Enveloppe der Sehnen gefunden werden, welche die Endpunkte conjugirter Durchmesser der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

mit einander verbinden.

Lös. Bezeichnet man mit ξ und η die Coordinaten eines Endpunktes des einen Durchmessers, so sind $\frac{a}{b}\eta$, $-\frac{b}{a}\xi$ diejenigen eines Endpunktes des conjugirten Durchmessers. Folglich wird die Gleichung der Verbindungssehne

$$\xi\left(y-\frac{b}{a}x\right)-\eta\left(x+\frac{a}{b}y\right)+ab=0.$$

Hierin bedeuten ξ und η zwei variable Parameter, die durch die Gleichung $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1$ mit einander verbunden sind. Die Enveloppe aller dieser Geraden ist die Ellipse $\frac{2x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}=1$.

62) **Aufg.** Welche Gleichung muss zwischen den variablen Parametern u und v bestehen, damit die Gerade $ux+vy=1$ in jeder ihrer Lagen Tangente an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sei?

Lös. Es muss $a^2u^2+b^2v^2=1$ sein. (Gleichung der Ellipse in Liniencoordinaten).

63) **Aufg.** Es ist die Evolute der Curve

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

zu bestimmen. (Vergl. Aufg. 46, f.)

Lös. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieser Curve können gegeben werden durch die Gleichungen $x'=a\cos^3\varphi$, $y'=a\sin^3\varphi$. Demnach wird die Gleichung der Normale in diesem Punkte $x\cos\varphi-y\sin\varphi=a\cos 2\varphi$ oder

$$\frac{x+y}{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{x-y}{\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}=2^{\frac{3}{2}}a.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung φ als variablen Parameter, so ist die Enveloppe aller dieser Normalen die gesuchte Evolute. Man erhält die Gleichung $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

Anm. Es ist eine nützliche Uebung, die Evolute einer gegebenen Curve nicht nur als Ort der Krümmungsmittelpunkte derselben zu bestimmen, sondern auch dadurch, dass man sie als Enveloppe der Normalen dieser Curve ansieht.

64) Aufg. Es soll zu einer gegebenen Curve die äquidistante Curve gefunden werden.

Lös. Wenn man sich für alle Punkte einer gegebenen Curve $F(x,y)=0$ die Normalen gezogen und auf diesen vorwärts oder rückwärts von dem betreffenden Punkt eine constante Länge k abgetragen denkt, so erhält man dadurch Punkte der äussern oder innern äquidistanten Curve. (Parallelcurve).

Wird der Winkel, den die Tangente im Punkte x, y der gegebenen Curve mit der positiven XAxe bildet, mit α bezeichnet, so findet man für die Coordinaten ξ, η des entsprechenden Punktes der äquidistanten Curve

$$\xi = x \mp k \sin\alpha, \quad \eta = y \pm k\cos\alpha.$$

Gelingt es, aus diesen beiden Gleichungen die Veränderlichen x, y und α mit Hülfe der gegebenen Curvengleichung zu eliminiren, so ist die resultirende Gleichung zwischen ξ und η die Gleichung der äquidistanten Curve.

Es wird ferner
$$d\xi = dx \mp k\cos\alpha\, d\alpha = \cos\alpha\,(ds \mp k\,d\alpha),$$
$$d\eta = dy \mp k\sin\alpha\, d\alpha = \sin\alpha\,(ds \mp k\, d\alpha);$$
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx},$$
d. h. die Tangenten in entsprechenden Punkten der gegebenen und der äquidistanten Curve sind parallel. Demnach kann die äquidistante Curve angesehen werden entweder als Enveloppe einer Geraden,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = \pm k\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2},$$

welche der Tangente an die gegebene Curve parallel und in constanter Entfernung $\pm k$ von derselben ist, oder als Enveloppe des Kreises vom Radius k

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = k^2,$$

dessen Mittelpunkt sich auf der gegebenen Curve bewegt.

Bezeichnet man mit $d\sigma$ das Bogendifferential der äquidistanten Curve, so findet sich

$$d\sigma = \pm (ds \mp k\, d\alpha).$$

Welcher Satz liegt hierin ausgesprochen?

Für das Flächenelement, welches begrenzt wird von der gegebenen und der äquidistanten Curve und von zwei Normalen, die den Winkel $d\alpha$ mit einander einschliessen, erhält man

$$\pm k ds - \tfrac{1}{2} k^2 d\alpha.$$

Welche Eigenschaft der äquidistanten Curven drückt diese Formel aus?

Der Krümmungsradius ϱ' der äquidistanten Curve wird

$$\varrho' = \frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{ds}{d\alpha} \mp k = \varrho \mp k.$$

a) Es sei ein Kreis mit dem Radius r gegeben; man suche die äquidistante Curve.

Lös. Die Gleichung des Kreises sei

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Irgend ein Punkt x, y desselben ist bestimmt durch die Gleichungen

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi.$$

Hieraus folgt $\operatorname{tang}\alpha = -\operatorname{cotg}\varphi$, also $\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi$.

Demnach erhält man für die Coordinaten des entsprechenden Punktes der äquidistanten Curve

$$\xi = (r \mp k)\cos\varphi, \quad \eta = (r \mp k)\sin\varphi,$$

woraus sich als Gleichung der innern oder äussern äquidistanten Curve ergibt $\xi^2 + \eta^2 = (r \mp k)^2.$

Es sind somit die äquidistanten Curven Kreise, welche mit dem gegebenen concentrisch sind.

b) Es sei eine Ellipse mit den beiden Halbaxen a und b gegeben; man sucht die beiden äquidistanten Curven.

Lös. Wenn die Ellipse dargestellt ist durch die beiden Gleichungen

$$x = a \cos\varphi, \quad y = b \sin\varphi,$$

so findet man für die Coordinaten der dem Punkte x, y entsprechenden Punkte der äquidistanten Curven

$$\xi = x \pm \frac{k}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = \left[a \pm \frac{bk}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}\right]\cdot\cos\varphi,$$

$$\eta = y \mp \frac{k\cdot\frac{dx}{dy}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{y}\right)^2}} = \left[b \mp \frac{ak}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}\right]\cdot\sin\varphi.$$

Wenn man hieraus den Winkel φ eliminirt, erhält man die Gleichungen der äquidistanten Curven.

c) Wenn man für die gewöhnliche Cycloide die äquidistanten Curven sucht, so ist für einen beliebigen Punkt der Cycloide

$$x = r.(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = r.(1 - \cos\varphi).$$

Die Coordinaten der entsprechenden Punkte der äquidistanten Curven sind dann bestimmt durch

$$\xi = r.\varphi - (2r\sin\tfrac{1}{2}\varphi \mp k).\cos\tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$\eta = (2r\sin\tfrac{1}{2}\varphi \mp k).\sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

B. Curven von doppelter Krümmung. (Raumcurven).

65) Aufg. Man beweise den Satz: Wenn die beiden Krümmungen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{r}$ einer Raumcurve ein constantes Verhältniss haben, so sind die Hauptnormalen dieser Curve einer festen Ebene und die rectificirenden Kanten einer festen Geraden parallel. Mit andern Worten: Die rectificirende Developpable ist ein Cylinder und die Raumcurve eine Helix. (Bertrand).

Anleitung. Der Beweis kann gegeben werden mit Hülfe des Satzes: Die rectificirende Kante theilt den Winkel zwischen Tangente und Binormale in der Weise, dass die Sinus der Theile sich verhalten, wie $d\tau : d\vartheta$. Trägt man daher auf die Tangente vom Curvenpunkte aus die Strecke $\frac{1}{r}$, auf die Binormale die Strecke $\frac{1}{\varrho}$ ab und denkt sich die Figur zu einem Parallelogramm vervollständigt, so besitzt die Diagonale desselben die Richtung der rectificirenden Kante und die Länge der

ganzen Krümmung. Wenn nun $\frac{r}{\varrho}$ constant ist, so ist auch $\frac{r}{R^*}$ constant und daher sind auch die Winkel des Dreiecks, dessen Seiten $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{R^*}$ sind, constant. Die Raumcurve schneidet somit sämmtliche Erzeugende der rectificirenden Developpablen unter constantem Winkel; sie ist also eine isogonale Trajectorie dieser Erzeugenden. Zeigt man noch (durch Differentiation), dass die Grössen $\cos a^*$, $\cos b^*$, $\cos c^*$ unabhängig von der Lage des Curvenpunktes sind, so ergeben sich leicht die in obigem Satze ausgesprochenen Eigenschaften der Raumcurve.

Zusatz. Wenn die beiden Krümmungen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{r}$ einer Raumcurve constant sind, so ist die Curve eine Schraubenlinie, die auf einem Kreiscylinder liegt.

66) Aufg. Es soll die cylindrische Schraubenlinie untersucht werden.

Lös. Die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punktes der cylindrischen Schraubenlinie können dargestellt werden durch die Gleichungen

$$x = m\cos\varphi, \quad y = m\sin\varphi, \quad z = n\varphi.$$

Hieraus folgt $$x^2 + y^2 = m^2,$$

d. h. die Curve liegt auf einem geraden Kreiscylinder vom Radius m. Die Projection der Curve auf die XZ Ebene ist die Curve $x = m\cos\frac{z}{n}$, diejenige auf die YZ Ebene die Curve $y = m\sin\frac{z}{n}$. Die Rechnung ergibt $$ds = \sqrt{m^2+n^2}\,.\,d\varphi;$$

$$\cos\alpha = \frac{-m\sin\varphi}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad \cos\beta = \frac{m\cos\varphi}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

$$\cos\lambda = \frac{n\sin\varphi}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad \cos\mu = -\frac{n\cos\varphi}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad \cos\nu = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

$$\cos a = -\cos\varphi, \quad \cos b = -\sin\varphi, \quad \cos c = 0.$$

Da $\cos\gamma$ und $\cos\nu$ constant sind, so ist die Curve eine isogonale Trajectorie der Erzeugenden des Cylinders, auf welchem sie liegt; die Binor-

malen bilden mit der Z Axe und folglich die Osculationsebenen mit der XY Ebene einen constanten Winkel. Die Hauptnormalen schneiden die Z Axe und da $\cos c = 0$ ist, so sind sie der XY Ebene parallel, woraus folgt, dass die rectificirenden Ebenen der Z Axe parallel sind. Die rectificirende Developpable ist identisch mit dem Cylinder $x^2 + y^2 = m^2$. Wird dieser Cylinder in eine Ebene ausgebreitet, so erscheint die Schraubenlinie in der Abwicklung als Gerade.

Es wird ferner $d\tau = \dfrac{m d\varphi}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad d\vartheta = \dfrac{n d\varphi}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad dk = d\varphi;$

$$\varrho = \frac{m^2+n^2}{m}, \quad r = \frac{m^2+n^2}{n}, \quad R^* = \sqrt{m^2+n^2};$$

$$h = \frac{d\varrho}{d\vartheta} = 0, \quad R = \varrho.$$

Es sind somit sämmtliche Krümmungen, sowie auch der Radius der osculirenden Kugel der Schraubenlinie constant. Dass die rectificirenden Kanten der Z Axe parallel sind, wird bestätigt durch die Formeln

$$\cos a^* = 0, \quad \cos b^* = 0, \quad \cos c^* = 1.$$

Es ist die Gleichung

der Normalebene: $\quad -m\sin\varphi(\xi - x) + m\cos\varphi(\eta - y) + n(\zeta - z) = 0,$

„ Osculationsebene: $\quad n\sin\varphi(\xi - x) - n\cos\varphi(\eta - y) + m(\zeta - z) = 0,$

„ rectificirenden Ebene: $\quad \cos\varphi(\xi - x) + \sin\varphi(\eta - y) = 0.$

67) Aufg. Untersuchung der conischen Spirale.

Lös. Jeder Punkt dieser Curve ist bestimmt durch die Gleichungen

$$x = t\cos(mlt), \quad y = t\sin(mlt), \quad z = nt,$$

in welchen t die unabhängige Veränderliche bedeutet. Aus denselben folgt

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{n^2} = 0;$$

daher liegt die Curve auf einem Rotationskegel, dessen Spitze der Coordinatenanfangspunkt und dessen Axe die Z Axe ist. Die Gleichung

$$x^2 + y^2 = t^2$$

lässt erkennen, dass jeder bestimmte Werth der unabhängigen Veränderlichen t den Abstand des zugehörigen Curvenpunktes von der Z Axe angibt. Setzt man der Kürze wegen $mlt = \varphi$, so folgt $t = e^{\frac{\varphi}{m}}$, und es

ist somit die Horizontalprojection der zu untersuchenden Raumcurve eine logarithmische Spirale. Man findet

$$dx = (\cos\varphi - m\sin\varphi)\,dt,\quad d^2x = -\frac{m}{t}\,dy\,dt,\quad d^3x = \frac{m}{t^2}(1+m^2)\sin\varphi\,dt^3;$$

$$dy = (\sin\varphi + m\cos\varphi)\,dt,\quad d^2y = \frac{m}{t}\,dx\,dt,\quad d^3y = -\frac{m}{t^2}(1+m^2)\cos\varphi\,dt^3;$$

$$dz = n\,dt,\qquad d^2z = 0,\qquad d^3z = 0;$$

$$ds = \sqrt{1+m^2+n^2}\,dt;$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos\varphi - m\sin\varphi}{\sqrt{1+m^2+n^2}},\quad \cos\beta = \frac{\sin\varphi + m\cos\varphi}{\sqrt{1+m^2+n^2}},\quad \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}}.$$

Da $\cos\gamma$ constant ist, so ist also auch der Winkel, den die Tangente mit der ZAxe bildet, constant, und der Richtungskegel der Tangenten ist demnach ein gerader Kreiskegel.

Bezeichnet man mit ω den Winkel, den die Tangente im Punkte x, y, z mit der Erzeugenden des Kegels $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{n^2} = 0$, welche durch diesen Punkt geht, bildet, so ist

$$\cos\omega = \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{\frac{1+n^2}{1+m^2+n^2}}.$$

Dieser Winkel ist von t unabhängig, folglich ist die Curve eine isogonale Trajectorie der Erzeugenden des Kegels. Es ist ferner

$$A = -\frac{mn}{t}\,dx\,dt^2,\quad B = -\frac{mn}{t}\,dy\,dt^2,\quad C = \frac{m}{t}(1+m^2)\,dt^3,$$

$$D = \frac{m}{t}\sqrt{(1+m^2)(1+m^2+n^2)}\,.\,dt^3.$$

Daher wird

$$\cos\lambda = -\frac{n(\cos\varphi - m\sin\varphi)}{\sqrt{(1+m^2)(1+m^2+n^2)}},\quad \cos\mu = -\frac{n(\sin\varphi + m\cos\varphi)}{\sqrt{(1+m^2)(1+m^2+n^2)}},$$

$$\cos\nu = \frac{1+m^2}{\sqrt{(1+m^2)(1+m^2+n^2)}}.$$

Die Binormale und folglich auch die Osculationsebene bildet also ebenfalls mit der ZAxe einen constanten Winkel.

$$\cos a = -\frac{\sin\varphi + m\cos\varphi}{\sqrt{1+m^2}},\quad \cos b = \frac{\cos\varphi - m\sin\varphi}{\sqrt{1+m^2}},\quad \cos c = 0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass die Hauptnormalen sämmtlich der XYEbene parallel sind. Sie schneiden jedoch die ZAxe nicht. Die

rectificirenden Ebenen sind der Z Axe parallel und umhüllen somit einen Cylinder. Der Schnitt desselben mit der XY Ebene ist die oben erwähnte logarithmische Spirale.

$$d\tau = \frac{m}{t}\sqrt{\frac{1+m^2}{1+m^2+n^2}}dt, \quad d\vartheta = \frac{mn}{t}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1+m^2+n^2}},$$

$$dk = \frac{m}{t}dt = d\varphi;$$

$$\varrho = \frac{1+m^2+n^2}{\sqrt{1+m^2}}\cdot\frac{t}{m}, \quad r = \frac{1+m^2+n^2}{mn}\cdot t, \quad R^* = \frac{t}{m}\sqrt{1+m^2+n^2}.$$

Da das Verhältniss $\frac{\varrho}{r} = \frac{n}{\sqrt{1+m^2}}$ constant ist, so ist die Raumcurve nach dem Bertrand'schen Satze eine Helix. Für den Radius R der Schmiegungskugel und für den Abstand h ihres Mittelpunktes von der Osculationsebene findet man

$$R = \frac{t(1+m^2+n^2)\sqrt{1+n^2}}{m^2 n}, \quad h = \frac{t(\sqrt{1+m^2+n^2})^3}{m^2 n\sqrt{1+m^2}}.$$

Die Gerade, welche den Curvenpunkt mit dem Mittelpunkt der zugehörigen Schmiegungskugel verbindet, schneidet beständig die Z Axe. Der Radius ϱ^* des Cylinders, auf welchem die Schmiegungshelix liegt, ist

$$\varrho^* = \frac{t\sqrt{1+m^2}}{m},$$

also gleich dem Krümmungsradius der logarithmischen Spirale im Punkte t, φ. Die Gleichungen

$$\cos a^* = 0, \quad \cos b^* = 0, \quad \cos c^* = 1$$

bestätigen das schon gefundene Resultat, dass die rectificirenden Kanten der Z Axe parallel sind. Endlich wird noch

die Gleichung der Normalebene

$$(\cos\varphi - m\sin\varphi)(\xi - x) + (\sin\varphi + m\cos\varphi)(\eta - y) + n(\zeta - z) = 0,$$

oder
$$\frac{dx}{dt}\xi + \frac{dy}{dt}\eta + \frac{dz}{dt}\zeta - t(1+n^2) = 0,$$

die Gleichung der Osculationsebene

$$n(\cos\varphi - m\sin\varphi)(\xi - x) + n(\sin\varphi + m\cos\varphi)(\eta - y) - (1+m^2)(\zeta - z) = 0,$$

oder
$$n\frac{dx}{dt}\xi + n\frac{dy}{dt}\eta - (1+m^2)\zeta + nm^2 t = 0,$$

die Gleichung der rectificirenden Ebene

$$(\sin\varphi + m\cos\varphi)(\xi - x) - (\cos\varphi - m\sin\varphi)(\eta - y) = 0,$$

oder
$$\frac{dy}{dt}\xi - \frac{dx}{dt}\eta - mt = 0.$$

68) Aufg. Ein grösster Kreis einer Kugel dreht sich um einen seiner Durchmesser mit gleichförmiger Geschwindigkeit, während gleichzeitig ein Punkt seine Peripherie durchläuft. Man untersuche die Curve, welche der Punkt beschreibt unter der Voraussetzung, dass seine Geschwindigkeit gleich derjenigen des Kreises sei.

Lös. Wählt man den festen Durchmesser zur Z Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen X- und Y Axe durch den Mittelpunkt der Kugel gehen und bezeichnet man mit φ den Winkel, den der bewegliche Kreis in irgend einer seiner Lagen mit der XZ Ebene bildet, so erhält man für die Coordinaten eines beliebigen Punktes der zu untersuchenden Curve

$$x = a\cos^2\varphi, \quad y = a\sin\varphi\cos\varphi, \quad z = a\sin\varphi,$$

wo a den Radius der Kugel bedeutet.

Die Curve liegt sowohl auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, als auch auf dem Kreiscylinder $x^2 + y^2 - ax = 0$ und auf dem parabolischen Cylinder $z^2 = a(a - x)$. Verlegt man das Coordinatensystem in den Punkt $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ und setzt zu diesem Zwecke $x = x' + a$, so erkennt man ohne Schwierigkeit, dass die Curve ebenfalls auf dem Rotationskegel $x'^2 + y^2 - z^2 = 0$ liegt. Sie kann demnach als Durchschnittscurve je zweier dieser vier Flächen construirt werden. Da x keine negativen Werthe haben kann, so liegt sie ganz auf einer Halbkugel. Sie ist symmetrisch in Bezug auf die XY- und XZ Ebene und besitzt im Punkte $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ einen Doppelpunkt. Es findet sich

$$ds = a\sqrt{1 + \cos^2\varphi}\, d\varphi;$$

$$\cos\alpha = -\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}, \quad \cos\beta = \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}, \quad \cos\gamma = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}};$$

$$\cos\lambda = \frac{\sin\varphi(2\cos^2\varphi + 1)}{\sqrt{5 + 3\cos^2\varphi}}, \quad \cos\mu = -\frac{2\cos^3\varphi}{\sqrt{5 + 3\cos^2\varphi}},$$

$$\cos\nu = \frac{2}{\sqrt{5 + 3\cos^2\varphi}};$$

$$\cos a = -2\,\frac{-1+2\cos^2\varphi+\cos^4\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,\sqrt{5+3\cos^2\varphi}},$$
$$\cos b = -\,\frac{5+2\cos^2\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,\sqrt{5+3\cos^2\varphi}}\cdot\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$\cos c = -\,\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,\sqrt{5+3\cos^2\varphi}}.$$

Ferner wird

die Gleichung der Normalebene
$$-\sin 2\varphi(\xi-x)+\cos 2\varphi(\eta-y)+\cos\varphi(\zeta-z) = 0,$$
die Gleichung der Osculationsebene
$$\sin\varphi(2\cos^2\varphi+1)(\xi-x)-2\cos^3\varphi(\eta-y)+2(\zeta-z) = 0,$$
die Gleichung der rectificirenden Ebene
$$2(-1+2\cos^2\varphi+\cos^4\varphi)(\xi-x)+(5+2\cos^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi(\eta-y)+\sin\varphi(\zeta-z)=0;$$
$$d\tau = \frac{\sqrt{5+3\cos^2\varphi}}{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi,\quad d\vartheta = \frac{6\cos\varphi\sqrt{1+\cos^2\varphi}}{5+3\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Demnach ist $\varrho = \dfrac{a(1+\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5+3\cos^2\varphi}}$, $r = \dfrac{a}{6}\cdot\dfrac{5+3\cos^2\varphi}{\cos\varphi}$

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ wird $d\vartheta = 0$; folglich besitzt die Curve in den Punkten $x = 0$, $y = 0$, $z = \pm a$ stationäre Osculationsebenen. Im Doppelpunkte ($\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$) stimmt der Radius der ersten Krümmung mit dem Kugelradius überein.

Der Abstand des Mittelpunktes der osculirenden Kugel von der Osculationsebene ist
$$h = -\,a\,\frac{2+\cos^2\varphi}{\sqrt{5+3\cos^2\varphi}}\cdot\sin\varphi.$$
Selbstverständlich fällt die osculirende Kugel in jedem Punkte der Raumcurve mit der Kugel zusammen, auf welcher die Raumcurve liegt, d. h. es ist $R = a$.

69) Aufg. Ein gerader Kreiskegel, dessen Höhe gleich dem Radius der Grundfläche, gleich 1 ist, rolle längs eines andern eben solchen Kegels und zwar so, dass sich die beiden Kegel beständig längs einer Erzeugenden berühren und ihre Spitzen zusammenfallen. Ein Punkt in der Peripherie der Basis des beweglichen Kegels beschreibt dann eine

Raumcurve, die man **sphärische Epicycloide** nennt. Es soll diese Curve untersucht werden.

Lös. Bezeichnet man den Wälzungswinkel mit φ und wählt die beiden Kegeln gemeinsame Spitze zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so wird ein beliebiger Punkt der Curve gegeben durch die Gleichungen

$$x = \cos\varphi + \sin^2\varphi, \quad y = \sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi, \quad z = -\cos\varphi.$$

Aus diesen Gleichungen folgen die weiteren

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \qquad z^2 + z + x - 1 = 0,$$

aus welchen hervorgeht, dass die zu betrachtende Curve sowohl auf der Kugel vom Radius $\sqrt{2}$, als auch auf einem parabolischen Cylinder liegt, dessen Erzeugenden der Y Axe parallel sind. Im Punkte $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$ besitzt die Curve eine Spitze. Wird der Anfangspunkt eines neuen Coordinatensystems in diesen Punkt verlegt mittelst der Formeln

$$x = x' + 1, \quad y = y', \quad z = z' - 1,$$

so erhält man leicht die Gleichung $x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0$. Es liegt somit die Curve auch auf einem Rotationskegel, dessen Spitze sich im neuen Coordinatenanfangspunkt befindet. Nun ergibt sich der Reihe nach

$$ds = \sin\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{2(3+\cos\varphi)}\,d\varphi;$$

$$\cos\alpha = \frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi(2\cos\varphi - 1)}{\sqrt{2(3+\cos\varphi)}}, \quad \cos\beta = \frac{2\sin\frac{3}{2}\varphi}{\sqrt{2(3+\cos\varphi)}},$$

$$\cos\gamma = \frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2(3+\cos\varphi)}};$$

$$\cos\lambda = \frac{1-2\cos\varphi-2\cos^2\varphi}{\sqrt{14+4\cos\varphi}}, \quad \cos\mu = \frac{-2\sin\varphi(1+\cos\varphi)}{\sqrt{14+4\cos\varphi}},$$

$$\cos\nu = \frac{3}{\sqrt{14+4\cos\varphi}};$$

$$\cos a = -\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi(5+10\cos\varphi+2\cos^2\varphi)}{\sqrt{(7+2\cos\varphi)(3+\cos\varphi)}},$$

$$\cos b = \frac{2(-2+4\cos\varphi+\cos^2\varphi)\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{(7+2\cos\varphi)(3+\cos\varphi)}}, \quad \cos c = \frac{-\sin\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{(7+2\cos\varphi)(3+\cos\varphi)}}.$$

$$d\tau = \frac{\sqrt{14+4\cos\varphi}}{3+\cos\varphi}d\varphi, \quad d\vartheta = \frac{6\cos\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{1}{2}(3+\cos\varphi)}}{7+2\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Da $d\vartheta = 0$ wird für $\varphi = \pi$, so besitzt die Curve im Punkte $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$ eine stationäre Osculationsebene.

Für die Radien der ersten und zweiten Krümmung ergibt sich

$$\varrho = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi(3+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{7+2\cos\varphi}}, \qquad r = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi(7+2\cos\varphi)}{3\cos\frac{1}{2}\varphi}.$$

Der Abstand h des Mittelpunktes der Schmiegungskugel von der Osculationsebene ist

$$h = \frac{1+4\cos\varphi+\cos^2\varphi}{\sqrt{14+4\cos\varphi}},$$

und der Radius dieser Kugel wird, da die Curve eine sphärische ist, für alle Punkte derselben constant und gleich dem Radius der Kugel, auf welcher die Curve liegt, also $R = \sqrt{2}$.

Endlich ist noch die Gleichung der Normalebene

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi(2\cos\varphi-1)(\xi-x)+\sin\tfrac{3}{2}\varphi(\eta-y)+\cos\tfrac{1}{2}\varphi(\zeta-z) = 0,$$

die Gleichung der Osculationsebene

$$(1-2\cos\varphi-2\cos^2\varphi)(\xi-x)-2\sin\varphi(1+\cos\varphi)(\eta-y)+3(\zeta-z) = 0,$$

die Gleichung der rectificirenden Ebene

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi(5+10\cos\varphi+2\cos^2\varphi)(\xi-x)-2(-2+4\cos\varphi+\cos^2\varphi)\cos\tfrac{1}{2}\varphi(\eta-y)+$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}\varphi(\zeta-z) = 0.$$

70) Aufg. Es soll die Curve untersucht werden, die entsteht aus dem Schnitt des parabolischen Cylinders

$$y^2 = 2px$$

mit dem Kreiscylinder $\quad z^2+x^2 = a^2.$

Lös. Aus der Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen folgen die weiteren

$$(x-p)^2+y^2+z^2 = a^2+p^2,$$
$$(x+p)^2+z^2-y^2 = a^2+p^2,$$

und es liegt daher diese Raumcurve sowohl auf einer Kugeloberfläche, als auch auf der Fläche eines einschaligen Rotationshyperboloids.

Es wird $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{2xy}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{a^2}{z^3}.$$

Die Gleichungen der Tangente $\eta - y = \frac{p}{y} \cdot (\xi - x)$,

$$\zeta - z = -\frac{x}{z} \cdot (\xi - x);$$

oder $\eta = \frac{p}{y} \cdot \xi + \frac{1}{2}y$,

$$\zeta = -\frac{x}{z} \cdot \xi + \frac{a^2}{z}.$$

Die Gleichung der Normalebene

$$-\frac{x}{z}(\zeta - z) + \frac{p}{y}(\eta - y) + (\xi - x) = 0,$$

oder $\xi + \frac{p}{y} \cdot \eta - \frac{x}{z} \cdot \zeta - p = 0.$

Die Länge der Tangente vom Berührungspunkt

bis zur YZ Ebene wird $\frac{x}{yz} \cdot \sqrt{a^2y^2 + p^2z^2}$,

„ „ XZ „ „ $\frac{y}{pz}\sqrt{a^2y^2 + p^2z^2}$,

„ „ XY „ „ $\frac{z}{xy}\sqrt{a^2y^2 + p^2z^2}$.

Die Gleichungen der Knotenlinien der Normalebene werden

in der YZ Ebene: $\frac{p}{y} \cdot \eta - \frac{x}{z} \cdot \zeta - p = 0$,

„ „ XZ „ $\xi - \frac{x}{z} \cdot \zeta - p = 0$,

„ „ XY „ $\xi + \frac{p}{y} \cdot \eta - p = 0$.

Die Gleichung der Krümmungsebene wird

$$p^2z^3 . \zeta - a^2y^3 . \eta + p^2x . (3a^2 - x^2) . \xi - p^2a^2 . (a^2 - 3x^2) = 0.$$

Der Halbmesser der ersten Krümmung wird

$$= \frac{(a^2y^2+p^2z^2)^{\frac{3}{2}}}{pa\,.\,\sqrt{a^2y^2(4x^2+y^2)+p^2z^2(4x^2+z^2)}}.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden

$$X = \frac{p\,.\,[a^2y^2(z^4+2a^2x^2)+\frac{1}{2}z^4(a^2y^2+2p^2z^2)]}{a^2.\,[a^2y^2(4x^2+y^2)+p^2z^2(4x^2+z^2)]},$$

$$Y = \frac{y\,.\,[a^2y^2(2x^2+y^2)+z^2(2p^2x^2-a^2y^2)]}{a^2y^2(4x^2+y^2)+p^2z^2(4x^2+z^2)},$$

$$Z = \frac{p^2z^3[a^2(z^2-2px)-x(pz^2+2a^2x)]}{a^2[a^2y^2(4x^2+y^2)+p^2z^2(4x^2+z^2)]}.$$

71) Aufg. Man untersuche die Curve, welche durch den Schnitt zweier Kreiscylinder entsteht, die respective auf der XY- und auf der XZ Ebene senkrecht stehen.

Die Curve ist gegeben durch die Gleichungen

$$x^2+y^2=a^2,$$
$$x^2+z^2=b^2.$$

Aus denselben folgt durch Addition und Subtraction

$$2x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2,$$
$$y^2-z^2 = a^2-b^2.$$

Es kann somit die Curve auch angesehen werden als der Schnitt eines Rotationsellipsoids mit einem hyperbolischen Cylinder. Für $a=b$ zerfällt der letztere in zwei Ebenen, und die Curve besteht in diesem Falle aus zwei Kegelschnitten.

Ferner wird $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, $\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{x}{y}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a^2}{y^3},\quad \frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{b^2}{z^3}.$$

Die Gleichungen der Tangente

$$\eta-y=-\frac{x}{y}(\xi-x),$$

$$\zeta-z=-\frac{x}{z}(\xi-x).$$

oder $\eta y+\xi x = a^2,$

$$\zeta z+\xi x = b^2.$$

Die Gleichung der Normalebene

$$(\xi-x)-(\eta-y)\,\frac{x}{y}-(\zeta-z)\,\frac{x}{z}=0,$$

oder $\dfrac{\xi}{x}-\dfrac{\eta}{y}-\dfrac{\zeta}{z}+1=0.$

Die Länge der Tangente vom Berührungspunkt

bis zur YZ Ebene wird $= x^2\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}$,

„ „ XZ „ „ $= y^2\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}$,

„ „ XY „ „ $= z^2\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}$.

Die Gleichungen der Knotenlinien der Normalebene werden

in der YZ Ebene: $\dfrac{\eta}{y}+\dfrac{\zeta}{z}-1=0,$

„ „ XZ „ $\dfrac{\xi}{x}-\dfrac{\zeta}{z}+1=0,$

„ „ XY „ $\dfrac{\xi}{x}-\dfrac{\eta}{y}+1=0.$

Die Gleichung der Krümmungsebene wird

$$x(b^2y^2-a^2z^2)\,.\,\xi+b^2y^3\,.\,\eta-a^2z^3\,.\,\zeta-a^2b^2y^2+a^2b^2z^2=0.$$

Der Halbmesser der ersten Krümmung wird

$$=\frac{(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^4b^2z^4+a^2b^4y^4-2a^2b^2x^2y^2z^2}}.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden

$$X=x^3\,.\,\frac{(a^2z^2-b^2y^2)^2-y^2z^2(a^2z^2+b^2y^2)}{a^4b^2z^4+a^2b^4y^4-2a^2b^2x^2y^2z^2},$$

$$Y=b^2y^3\cdot\frac{x^4y^2+a^2b^2y^2-2a^2x^2z^2}{a^4b^2z^4+a^2b^4y^4-2a^2b^2x^2y^2z^2},$$

$$Z=a^2z^3\cdot\frac{x^4z^2+a^2b^2z^2-2b^2x^2y^2}{a^4b^2z^4+a^2b^4y^4-2a^2b^2x^2y^2z^2}.$$

72) Aufg. Man untersuche die Curve, welche bei dem Durchschnitt eines Ellipsoids mit einer Kugel entsteht. (Sphärische Ellipse).

Wenn der gemeinsame Mittelpunkt beider Oberflächen der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so wird die Curve dargestellt durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$
$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

aus welchen leicht die vier weiteren folgen

$$\left(\frac{r^2}{a^2}-1\right)x^2+\left(\frac{r^2}{b^2}-1\right)y^2+\left(\frac{r^2}{c^2}-1\right)z^2=0,$$
$$\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)x^2+\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)y^2=c^2-r^2,$$
$$\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)x^2+\left(\frac{b^2}{c^2}-1\right)z^2=b^2-r^2,$$
$$\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)y^2+\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)z^2=a^2-r^2.$$

Die Curve liegt sonach auf sechs verschiedenen Flächen zweiter Ordnung, unter denen sich ein Kegel und drei Cylinder befinden. Für $r=b$ zerfällt sie in zwei Kreise. Bezeichnet man mit x_1, y_1, z_1 drei zusammengehörige Werthe von x, y, z und subtrahirt von

$$\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)x^2+\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)y^2=c^2-r^2$$

die Identität $\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)x_1^2+\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)y_1^2=c^2-r^2,$

so kann man die sphärische Ellipse auch darstellen durch die drei Gleichungen

$$\frac{x^2-x_1^2}{a^2(b^2-c^2)}=\frac{y^2-y_1^2}{b^2(c^2-a^2)}=\frac{z^2-z_1^2}{c^2(a^2-b^2)}.$$

Darnach erhält man

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\cdot\frac{b^2(c^2-a^2)}{a^2(b^2-c^2)},\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{x}{z}\cdot\frac{c^2(a^2-b^2)}{a^2(b^2-c^2)},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2}\cdot\frac{(c^2-a^2)(c^2-r^2)}{(c^2-b^2)^2y^3},\qquad \frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{c^4}{a^2}\cdot\frac{(b^2-a^2)(b^2-r^2)}{(b^2-c^2)^2z^3}.$$

Die Gleichungen der Tangente werden

$$\frac{x(\xi-x)}{a^2(b^2-c^2)}=\frac{y(\eta-y)}{b^2(c^2-a^2)}=\frac{z(\zeta-z)}{c^2(a^2-b^2)},$$

oder
$$\frac{x\xi-x_1^2}{a^2(b^2-c^2)}=\frac{y\eta-y_1^2}{b^2(c^2-a^2)}=\frac{z\zeta-z_1^2}{c^2(a^2-b^2)}.$$

Die Gleichung der Normalebene wird

$$a^2(b^2-c^2)\frac{\xi}{x}+b^2(c^2-a^2)\frac{\eta}{y}+c^2(a^2-b^2)\frac{\zeta}{z}=0.$$

Setzt man $R = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} - \frac{1}{r^2}}$, so wird die Länge der Tangente vom Berührungspunkt

$$\text{bis zur } YZ\text{Ebene} = \frac{b^2c^2rx}{(c^2-b^2)yz} \cdot R,$$

$$\text{„ „ } XZ \text{ „} = \frac{a^2c^2ry}{(c^2-a^2)xz} \cdot R,$$

$$\text{„ „ } XY \text{ „} = \frac{a^2b^2rz}{(b^2-a^2)xy} \cdot R.$$

Die Gleichungen der Knotenlinien der Normalebene werden

$$\text{in der } YZ\text{Ebene} \quad b^2(c^2-a^2)\frac{\eta}{y} + c^2(a^2-b^2)\frac{\zeta}{z} = 0,$$

$$\text{„ „ } XZ \text{ „} \quad a^2(b^2-c^2)\frac{\xi}{x} + c^2(a^2-b^2)\frac{\zeta}{z} = 0,$$

$$\text{„ „ } XY \text{ „} \quad a^2(b^2-c^2)\frac{\xi}{x} + b^2(c^2-a^2)\frac{\eta}{y} = 0.$$

Die Gleichung der Osculationsebene wird

$$\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2-r^2)}{a^4}x^3.(\xi-x) + \frac{(b^2-a^2)(b^2-c^2)(b^2-r^2)}{b^4}y^3.(\eta-y) + \\ + \frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)(c^2-r^2)}{c^4}z^3(\zeta-z) = 0.$$

Wenn man der Kürze wegen folgende Bezeichnung einführt:

$$M = \frac{1}{a^4b^4c^4}\Big[\frac{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^2(a^2-r^2)^2}{a^8}x^6 + \frac{(b^2-a^2)^2(b^2-c^2)^2(b^2-r^2)^2}{b^8}y^6 + \\ + \frac{(c^2-a^2)^2(c^2-b^2)^2(c^2-r^2)^2}{c^8}z^6\Big],$$

so wird der Radius der ersten Krümmung

$$= \frac{r^3R^3}{\sqrt{M}}$$

und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden

$$X = x + \frac{xr^2R^2}{a^4b^2c^2M}(c^2-b^2)\Big[\frac{(b^2-a^2)^2(b^2-r^2)}{b^6}y^4 - \frac{(c^2-a^2)^2(c^2-r^2)}{c^6}z^4\Big],$$

$$Y = y + \frac{yr^2R^2}{a^2b^4c^2M}(a^2-c^2)\Big[\frac{(c^2-b^2)^2(c^2-r^2)}{c^6}z^4 - \frac{(a^2-b^2)^2(a^2-r^2)}{a^6}x^4\Big],$$

$$Z = z + \frac{zr^2R^2}{a^2b^2c^4M}(b^2-a^2)\Big[\frac{(a^2-c^2)^2(a^2-r^2)}{a^6}x^4 - \frac{(b^2-c^2)^2(b^2-r^2)}{b^6}y^4\Big].$$

Anm. In Folge der Eigenschaft, dass die Summe der Entfernungen (gemessen auf Bogen grösster Kreise) ihrer Punkte von zwei festen Punkten der Kugeloberfläche constant ist, hat die hier untersuchte Curve den Namen sphärische Ellipse erhalten.

C. Krumme Oberflächen.

Cylinderflächen.

73) Aufg. Es ist die Gleichung einer cylindrischen Oberfläche zu finden, deren Erzeugenden der Geraden $\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}$ parallel sind und deren Leitcurve gegeben ist durch die Gleichungen $u = 0$, $v = 0$.

Lös. Bezeichnet man die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Leitcurve mit x, y, z, die laufenden Coordinaten mit ξ, η, ζ, so können die Gleichungen einer Erzeugenden geschrieben werden

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}.$$

Die gesuchte Cylindergleichung ergibt sich nun, wenn man aus diesen und den Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ die Veränderlichen x, y, z eliminirt. Setzt man zu diesem Zwecke die gleichen Quotienten

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C} = \lambda, \text{ so wird}$$

$$x = \xi - A\lambda, \quad y = \eta - B\lambda, \quad z = \zeta - C\lambda.$$

Nachdem man die Grösse λ aus einer der Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ bestimmt hat, erhält man die gesuchte Gleichung der cylindrischen Oberfläche durch die Substitution der Werthe für x, y, z in die andere der Gleichungen $u = 0$, $v = 0$.

a) Wenn die leitende Curve ein Kreis in der XY Ebene ist, bestimmt durch die Gleichungen $z = 0$,

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2;$$

und wenn die Erzeugenden der Geraden

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{1}$$

parallel sein sollen, so erhält man als gesuchte Gleichung des Cylinders

$$(\eta - b\zeta - B)^2 + (\xi - a\zeta - A)^2 = R^2.$$

Wenn der Mittelpunkt des gegebenen Kreises zugleich Anfangspunkt der Coordinaten ist, so wird $A = 0$ und $B = 0$, und wenn die Axe des Cylinders zugleich die ZAxe ist, so wird $a = 0$ und $b = 0$ und daher die Gleichung des gewöhnlichen geraden Kreiscylinders

$$y^2 + x^2 = R^2.$$

b) Wenn die leitende Curve eine Ellipse in der XYEbene ist, dargestellt durch die Gleichungen

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

und wenn verlangt wird, dass die Erzeugenden der Geraden

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{1}$$

parallel seien, so erhält man als Gleichung des Cylinders

$$\frac{(\xi - a\zeta)^2}{A^2} + \frac{(\eta - b\zeta)^2}{B^2} = 1.$$

74) Aufg. Es ist der Cylinder zu bestimmen, welcher die Fläche zweiter Ordnung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \quad 1)$$

umhüllt und dessen Erzeugenden eine gegebene Richtung besitzen.

Lös. Sind die Cosinus der Winkel, welche die gegebene Richtung mit den Coordinatenaxen bildet, den Zahlen A, B, C proportional, so können die Gleichungen derjenigen Erzeugenden, welche die gegebene Fläche zweiter Ordnung im Punkte x, y, z berührt, geschrieben werden

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C} \quad 2)$$

Die Coordinaten x, y, z der Punkte, welche der Berührungscurve angehören, genügen der partiellen Differentialgleichung der Cylinderflächen. Darnach ist die Berührungscurve der Durchschnitt der gegebenen Fläche mit der Ebene $\quad aAx + bBy + cCz = 0. \quad 3)$

Die Gleichung der Cylinderfläche wird nun erhalten, indem man aus den Gleichungen 1), 2) und 3) die Veränderlichen x, y, z eliminirt.

Die gesuchte Gleichung lautet

$$(aA^2 + bB^2 + cC^2)(a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 - 1) = (aA\xi + bB\eta + cC\zeta)^2.$$

Zusatz. Wird allgemein die Gleichung des Cylinders verlangt, dessen Erzeugenden den Richtungscosinus A, B, C entsprechen und

welcher eine gegebene Fläche zweiter Ordnung $F(x, y, z) = 0$ umhüllt, so erhält man durch ein Verfahren, welches dem soeben angegebenen ganz analog ist, wenn man noch $F(\xi, \eta, \zeta) = u$ setzt

$$2u\left[A^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+B^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+C^2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+2AB\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+2BC\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\zeta}+2CA\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\xi}\right]=$$
$$=\left[A\frac{\partial u}{\partial\xi}+B\frac{\partial u}{\partial\eta}+C\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right]^2.$$

Kegelflächen.

75) Aufg. Man bestimme die Gleichung einer conischen Oberfläche vom Scheitel a, b, c, wenn die Leitcurve durch die Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ dargestellt ist.

Lös. Sind x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Leitcurve, ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten, so ist die Erzeugende, welche durch den Punkt x, y, z geht, bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{\xi - a}{x - a} = \frac{\eta - b}{y - b} = \frac{\zeta - c}{z - c}.$$

Die Elimination der Grössen x, y, z aus diesen und den Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ liefert die gesuchte Gleichung der conischen Oberfläche. Werden zu diesem Zwecke die drei gleichen Quotienten $= \frac{1}{\lambda}$ gesetzt, so folgt

$$x = a + \lambda(\xi - a), \quad y = b + \lambda(\eta - b), \quad z = c + \lambda(\zeta - c).$$

Die Grösse λ kann aus einer der Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ bestimmt werden. Setzt man hierauf die Werthe für x, y, z in die andere der Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ ein, so erhält man als Substitutionsresultat die gesuchte Gleichung.

a) Wenn die leitende Curve eine Ellipse ist, gegeben durch die Gleichungen

$$z = h,$$
$$\frac{(y - q)^2}{B^2} + \frac{(x - p)^2}{A^2} = 1,$$

und wenn der Scheitel die Coordinaten $a, b, 0$ hat, so erhält man als Gleichung der conischen Oberfläche

$$A^2\,[(\eta - b)\,h + (b - q)\zeta]^2 + B^2\,[(\xi - a)h + (a - p)\zeta]^2 = A^2 B^2 \zeta^2.$$

Wenn die leitende Curve ein Kreis ist, so hat man nur $A = B = r$ zu setzen.

b) Wenn die leitende Curve eine Lemniscate ist

$$z = 0,\ (x^2 + y^2)^2 = r^2 . (x^2 - y^2),$$

und der Scheitel die Coordinaten a, b, c haben soll, so ergibt sich für die mit dieser Basis gebildete conische Oberfläche

$$[(a\zeta - c\xi)^2 + (b\zeta - c\eta)^2]^2 = r^2 . (\zeta - c)^2 . [(a\zeta - c\xi)^2 - (b\zeta - c\eta)^2].$$

c) Wenn die leitende Curve eine apollonische Parabel ist

$$z = 0,\quad y^2 = 2px,$$

und der Scheitel die Coordinaten a, b, c hat, so erhält man als Gleichung der conischen Oberfläche

$$(b\zeta - c\eta)^2 = 2p(\zeta - c)(a\zeta - c\xi).$$

76) Aufg. Man bestimme den Kegel vom Scheitel a, b, c, welcher die Fläche zweiter Ordnung

$$F(x, y, z) = 0$$

umhüllt.

Lös. Bezeichnet man der Kürze wegen $F(a, b, c)$ mit u und beachtet, dass nach der partiellen Differentialgleichung der Kegelflächen die Berührungscurve der Durchschnitt der Fläche $F(x, y, z) = 0$ mit der Fläche

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(z-c) = 0$$

ist, so erhält man als Gleichung des Berührungskegels

$$2u\left[\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}(\xi - a)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2}(\eta - b)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}(\zeta - c)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial a\,\partial b}(\xi - a)(\eta - b) + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2 u}{\partial b\,\partial c}(\eta - b)(\zeta - c) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial c\,\partial a}(\zeta - c)(\xi - a)\right] =$$
$$= \left[\frac{\partial u}{\partial a}(\xi - a) + \frac{\partial u}{\partial b}(\eta - b) + \frac{\partial u}{\partial c}(\zeta - c)\right]^2 .$$

Rotationsflächen.

77) Aufg. Es soll die Gleichung der Fläche abgeleitet werden, welche entsteht, wenn eine gegebene Curve $u = 0$, $v = 0$ um eine gegebene Gerade $\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}$ als Axe rotirt.

Lös. Durch die Elimination der Veränderlichen x, y, z aus den vier Gleichungen

$$u = 0,\quad v = 0,$$
$$Ax + By + Cz = \alpha,\quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \varphi(\alpha)$$

wird im Allgemeinen die Natur der Function φ bestimmt, und man erhält dann als gesuchte Gleichung der Rotationsfläche

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2 = \varphi(A\xi + B\eta + C\zeta).$$

Wenn die Wahl des Coordinatensystems frei steht, so wird man zweckmässig die Rotationsaxe zu einer der Coordinatenaxen, etwa zur ZAxe machen. Dann ist jeder ebene, zur ZAxe senkrechte Schnitt ein Kreis, und es wird daher die Gleichung der Rotationsoberfläche von der Form sein

$$\xi^2 + \eta^2 = \psi(\zeta).$$

Da die Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes der Curve $u = 0$, $v = 0$ der Gleichung der Fläche genügen müssen, so kann die Function $\psi(z)$ dadurch bestimmt werden, dass man aus den Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ die Grösse $x^2 + y^2$ als Function von z berechnet.

a) Wenn in der XZEbene eine Ellipse mit den beiden Halbaxen A und B und den Mittelpunkts-Coordinaten p und q gegeben ist und wenn die ZAxe zugleich die Drehungsaxe ist, so lautet die Gleichung der Oberfläche:

$$p + \frac{A}{B}\sqrt{B^2 - (\zeta - q)^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Die Gestalt der Fläche hängt wesentlich von den Annahmen $p \gtreqless A$ ab.

Wenn der Mittelpunkt der Ellipse zugleich Anfangspunkt der Coordinaten ist, also $p = 0$ und $q = 0$, so wird

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{A^2} + \frac{\zeta^2}{B^2} = 1$$

die Gleichung eines Rotationsellipsoids, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um die ZAxe entstanden ist.

b) Wenn die rotirende Curve eine gerade Linie in der XZEbene und die Rotationsaxe wieder die ZAxe ist, so erhält man als Gleichung der Oberfläche

$$A\zeta + B = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

welche einen Kegel darstellt. Geht die erzeugende Gerade durch den Anfangspunkt der Coordinaten, ist also $B = 0$, dann liegt der Scheitel des Kegels in diesem Anfangspunkt und die Gleichung wird

$$\xi^2 + \eta^2 = A^2 . \zeta^2,$$

wo A die Tangente des Winkels bedeutet, welchen die Seitenlinie des Kegels mit dessen Axe bildet.

78) Aufg. Eine Rotationsfläche, deren Axe die ZAxe ist, umhüllt das Rotationsellipsoid

$$\frac{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}{a^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1. \qquad 1)$$

Welches ist ihre Gleichung?

Lös. Da die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Berührungscurve der partiellen Differentialgleichung der Rotationsflächen genügen, so hat man die Beziehung

$$\beta x-\alpha y=0; \qquad 2)$$

und es ist somit die Berührungscurve die Schnittcurve der Fläche 1) mit der Ebene 2). Die gesuchte Gleichung wird

$$\frac{[\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\mp\sqrt{\xi^2+\eta^2}]^2}{a^2}+\frac{(\zeta-\gamma)^2}{c^2}=1.$$

79) Aufg. Es soll gezeigt werden, dass die Fläche

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=r^3$$

eine Rotationsfläche ist.

Lös. Indem man zeigt, dass die Gleichung der partiellen Differentialgleichung der Rotationsflächen genügt, findet man für die Rotationsaxe die Gleichungen $x=y=z$.

Enveloppen.

80) Aufg. Es ist eine ebene Curve gegeben, und auf ihr bewegt sich der Mittelpunkt einer Kugel; man soll die einhüllende Oberfläche dieser beweglichen Kugel finden.

Lös. Wenn man die Ebene der Curve zur XYEbene annimmt, so sei $\beta=\varphi(\alpha)$ die Gleichung der Curve; ferner sei r der Radius der bewegten Kugel und α die Abscisse ihres Mittelpunkts bei irgend einer Lage; alsdann wird

$$(x-\alpha)^2+[y-\varphi(\alpha)]^2+z^2=r^2$$

die Gleichung der Kugel. Wenn man aus dieser und aus ihrem in Bezug auf α gebildeten ersten Differentialquotienten, nämlich

$$(x-\alpha)+[y-\varphi(\alpha)]\cdot\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}=0,$$

die Grösse α eliminirt, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Oberfläche.

a) Wenn die ebene Curve, auf welcher sich der Mittelpunkt der Kugel des Radius r bewegt, ein Kreis mit dem Radius ϱ ist und wenn dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so dass seine Gleichung $\beta^2 + \alpha^2 = \varrho^2$ wird, so hat man

$$(x-\alpha)^2 + (y - \sqrt{\varrho^2 - \alpha^2})^2 + z^2 = r^2,$$
$$x\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2} - y\alpha = 0.$$

Eliminirt man hieraus die Grösse α, so wird die Gleichung der einhüllenden Oberfläche

$$\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{r^2 - z^2} = \varrho.$$

Die beiden vorhergehenden Gleichungen zusammengenommen stellen die zu dem speciellen Werth von α gehörige Charakteristik dieser Oberfläche dar. Ihre Projection auf die XYEbene ist

$$x\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2} = y\alpha, \text{ eine gerade Linie,}$$

und ihre Projection auf die XZ Ebene

$$(x-\alpha)^2 \cdot \frac{\varrho^2}{\alpha^2} + z^2 = r^2, \text{ eine Ellipse.}$$

Es ist also die Charakteristik eine ebene Curve und zwar ein Kreis vom Radius r, dessen Ebene senkrecht auf der XYEbene steht. Die Knotenlinie dieser Ebene macht mit der XAxe einen Winkel, dessen Cosinus $= \frac{\alpha}{\varrho}$ ist.

b) Wenn die leitende Curve, auf welcher sich der Mittelpunkt der Kugel vom Radius r bewegt, eine Ellipse mit den beiden Halbaxen a und b ist und wenn der Mittelpunkt der Ellipse der Anfangspunkt der Coordinaten, so dass ihre Gleichung $\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\alpha^2}{a^2} = 1$ ist, so wird

$$(x-\alpha)^2 + (y - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha^2})^2 + z^2 = r^2,$$

also der Differentialquotient in Bezug auf α

$$a^2x = \left[(a^2 - b^2) + \frac{aby}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}\right] . \alpha.$$

Wird aus diesen beiden Gleichungen α eliminirt, was allerdings ausführbar ist, aber ein sehr unerquickliches Resultat gibt, so hat man

die Gleichung der einhüllenden Oberfläche. — Nimmt man aber hierzu noch den zweiten Differentialquotienten

$$0 = a^2 - b^2 + \frac{a^3 by}{(a^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und eliminirt nun aus diesen drei Gleichungen die Grösse α, so erhält man als die beiden zusammengehörigen Gleichungen der **Rückkehrkante** der Oberfläche

$$x = \frac{1}{a}\left[(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}}\right] . \sqrt{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}}},$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - (by)^{\frac{2}{3}}(a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}} = r^2 + a^2 - 2b^2.$$

c) Wenn die leitende Curve wieder wie in dem ersten Beispiel ein Kreis mit dem Radius ϱ in der XYEbene ist, also seine Gleichung $\beta^2 + \alpha^2 = \varrho^2$ und wenn sich auf seiner Peripherie der Mittelpunkt eines Ellipsoids mit den drei Halbaxen a, b, c so bewegt, dass die Axe $2a$ stets parallel mit der XAxe bleibt, so hat man

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \sqrt{\varrho^2 - \alpha^2})^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Der erste Differentialquotient in Bezug auf α wird

$$\frac{x}{a^2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \cdot \alpha - \frac{y}{b^2} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}} = 0,$$

und der zweite

$$(\varrho^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2 \varrho^2 y}{a^2 - b^2}.$$

Eliminirt man aus den beiden ersten Gleichungen α, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Fläche, was aber ein unbequemes Resultat gibt; eliminirt man aber aus allen dreien die Grösse α, so erhält man als die beiden Gleichungen ihrer Rückkehrkante

$$(b^2 \varrho^2 x)^{\frac{2}{3}} + (a^2 \varrho^2 y)^{\frac{2}{3}} = \varrho^2 (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 3\,\frac{(a^2 \varrho^2 y)^{\frac{2}{3}}(a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}}}{a^2 b^2} = 1 - \frac{\varrho^2 (2a^2 - b^2)}{a^2 b^2}.$$

Wenn das Ellipsoid durch Rotation um die ZAxe entstanden ist, so wird $a = b$, und es ergibt sich als Gleichung der einhüllenden Oberfläche

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \varrho + \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - z^2}.$$

81) Aufg. Man bestimme die Enveloppe der Ebenen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und von einem zweiten gegebenen Punkt gleichen Abstand haben.

Lös. Wählt man den zweiten gegebenen Punkt zum Coordinatenanfang und die Verbindungsgerade der beiden gegebenen Punkte zur ZAxe, so hat man die Enveloppe der Ebenen

$$ax + by + z = d$$

zu bestimmen, wobei die variablen Parameter a und b durch die Relation

$$p = \frac{d}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$

mit einander verbunden sind, welche ausdrückt, dass der Abstand einer jeden Ebene vom Coordinatenanfangspunkt gleich p sein soll. Man erhält als Enveloppe den Kreiskegel, dessen Gleichung lautet:

$$(d^2 - p^2)(x^2 + y^2) - p^2(d - z)^2 = 0.$$

82) Aufg. Man bestimme die Enveloppe der Ebenen

$$Ax + By + Cz = D,$$

wenn zwischen den variablen Parametern A, B, C und D die Gleichungen bestehen

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

$$\frac{A^2}{D^2 - a^2} + \frac{B^2}{D^2 - b^2} + \frac{C^2}{D^2 - c^2} = 0.$$

Lös. Differentiirt man die drei gegebenen Gleichungen nach A, B, C, D, multiplicirt die erhaltenen Gleichungen beziehungsweise mit λ, μ, 1 und addirt sie, so erhält man dadurch, dass man die Coefficienten von dA, dB, dC, dD gleich Null setzt, die Gleichungen

$$\lambda x = A\mu + \frac{A}{D^2 - a^2}, \qquad 1)$$

$$\lambda y = B\mu + \frac{B}{D^2 - b^2}, \qquad 2)$$

$$\lambda z = C\mu + \frac{C}{D^2 - c^2}, \qquad 3)$$

$$\lambda = D\left[\frac{A^2}{(D^2 - a^2)^2} + \frac{B^2}{(D^2 - b^2)^2} + \frac{C^2}{(D^2 - c^2)^2}\right]. \qquad 4)$$

Multiplicirt man hierauf 1), 2) und 3) resp. mit A, B, C und addirt, so folgt

$$\lambda D = \mu; \qquad 5)$$

multiplicirt man dagegen dieselben Gleichungen mit x, y, z und addirt, so kommt, wenn man der Kürze wegen $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ setzt

$$\lambda R^2 = D\mu + \frac{Ax}{D^2 - a^2} + \frac{By}{D^2 - b^2} + \frac{Cz}{D^2 - c^2}$$

oder in Folge von 5)

$$\lambda(R^2 - D^2) = \frac{Ax}{D^2 - a^2} + \frac{By}{D^2 - b^2} + \frac{Cz}{D^2 - c^2}. \qquad 6)$$

Erhebt man beide Seiten von 1), 2), 3) in's Quadrat und addirt, so ergibt sich

$$\lambda^2 R^2 = \mu^2 + \frac{A^2}{(D^2 - a^2)^2} + \frac{B^2}{(D^2 - b^2)^2} + \frac{C^2}{(D^2 - c^2)^2}.$$

Es wird daher nach 4) und 5)

$$\lambda = \frac{1}{D(R^2 - D^2)}, \quad \mu = \frac{1}{R^2 - D^2}.$$

Setzt man diese Werthe in 1), 2), 3) ein, so folgt

$$\frac{x}{R^2 - a^2} = \frac{AD}{D^2 - a^2},$$

$$\frac{y}{R^2 - b^2} = \frac{BD}{D^2 - b^2},$$

$$\frac{z}{R^2 - c^2} = \frac{CD}{D^2 - c^2}.$$

Multiplicirt man endlich diese Gleichungen resp. mit x, y, z und addirt unter Berücksichtigung des Werthes λ und der Gleichung 6), so folgt als Gleichung der gesuchten Enveloppe

$$\frac{x^2}{R^2 - a^2} + \frac{y^2}{R^2 - b^2} + \frac{z^2}{R^2 - c^2} = 1,$$

oder indem man links die Grösse $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2}$, rechts die ihr gleiche Grösse 1 subtrahirt

$$\frac{a^2 x^2}{R^2 - a^2} + \frac{b^2 y^2}{R^2 - b^2} + \frac{c^2 z^2}{R^2 - c^2} = 0.$$

Es stellt diese Gleichung die Wellenfläche von Fresnel dar, welche in der Optik ihre Anwendung findet. (Vergl. Mémoires de l'Institut, t. VII, pag. 136).

83) Aufg. Man bestimme a) die Fusspunktenfläche des dreiaxigen Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ für den Coordinatenanfangspunkt als Pol, b) deren Tangentialebene, c) den Abstand der letzteren vom Coordinatenanfangspunkt.
(Fällt man von einem gegebenen Punkte aus Perpendikel auf die Tangentialebenen einer gegebenen Fläche, so bilden die Fusspunkte der ersteren eine neue Fläche, welche die Fusspunktenfläche der gegebenen Fläche für den gegebenen Punkt als Pol genannt wird).

Lös. a) Als Gleichung der gesuchten Fusspunktenfläche findet man

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=(x^2+y^2+z^2)^2,$$

b) als Gleichung der Tangentialebene im Punkte x, y, z der Fusspunktenfläche

$$(2r^2-a^2)x\xi+(2r^2-b^2)y\eta+(2r^2-c^2)z\zeta=r^4,$$

wo $x^2+y^2+z^2=r^2$ gesetzt wurde;

c) der Abstand dieser Tangentialebene vom Coordinatenanfangspunkte wird

$$D=\frac{r^4}{\sqrt{a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2}}.$$

Die hier behandelte Fusspunktenfläche ist die Elasticitätsfläche von Fresnel, welche in der Theorie des Lichtes von grosser Wichtigkeit ist. (Fresnel, Mémoires de l'Institut, t. VIII, pag. 130).

84) Aufg. Es soll gezeigt werden, dass alle Tangentialebenen der Fläche

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

wo φ eine beliebige Function bezeichnet, durch einen und denselben Punkt gehen.

Lös. Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$\zeta-z=\frac{z}{x}(\xi-x)+\frac{x\eta-y\xi}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

und man erkennt, dass alle Tangentialebenen durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen. Die vorgelegte Gleichung ist die Gleichung eines Kegels, dessen Spitze der Coordinatenanfangspunkt ist. (Vergl. § 22).

85) Aufg. Man bestimme das Volumen der Pyramide, welche enthalten ist zwischen den Coordinatenebenen und der Tangentialebene an die Fläche

$$a^2y^2 + x^2z^2 = r^2x^2 \quad \text{(Cono-cuneus von Wallis).}$$

Lös. Man findet für das verlangte Volumen $\frac{x^3z^5}{a^2y(r^2-z^2)}$.

86) Aufg. Für die Fläche, deren Gleichung

$$xyz = a^3$$

ist, bestimme man: a) die Hauptkrümmungsradien, b) die Kreispunkte, c) die Fusspunktenfläche für den Coordinatenanfangspunkt als Pol.

Lös. a) Die Hauptkrümmungsradien können bestimmt werden aus der quadratischen Gleichung

$$R^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)\frac{R}{D} + \frac{27a^6}{D^4} = 0,$$

wo $D = \frac{3a^3}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}}$ den Abstand der Tangentialebene vom Coordinatenanfangspunkte bezeichnet.

b) Die Coordinaten der Kreispunkte sind

$$x = \pm y = \pm z = a; \quad -x = \pm y = \mp z = a.$$

In einem Kreispunkte ist $R = R_1 = R_2 = D = \sqrt{3}a$.

c) Die Gleichung der gesuchten Fusspunktenfläche ist

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 3a\sqrt[3]{\xi\eta\zeta}.$$

(In den Exercices méthodiques de calcul différentiel von Brahy ist pag. 215 irrthümlich $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ als Gleichung der Fusspunktenfläche angegeben).

87) Aufg. Es soll gezeigt werden, dass die Fläche

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1$$

von der Kugel $x^2+y^2+z^2 = r^2$ in den Kreispunkten berührt wird, wenn

$$r^{\frac{2n}{n-2}} = a^{\frac{2n}{n-2}} + b^{\frac{2n}{n-2}} + c^{\frac{2n}{n-2}}.$$

Lös. Bestimmt man die Coordinaten eines Kreispunktes der gegebenen Fläche und setzt dieselben in die Gleichung der Kugel, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, ein, so findet man als Bedingung, dass der Kreispunkt ein Punkt der Kugel sei, die in der Aufgabe enthaltene Beziehung zwischen

a, b, c und r. Ist diese Bedingung erfüllt, so sind für die Coordinaten der Kreispunkte die Grössen $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ für beide Flächen identisch, womit die in der Aufgabe ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

88) Aufg. Die Hauptnormalen der cylindrischen Schraubenlinie, welche gegeben ist durch die Gleichungen

$$x = m \cos\varphi, \quad y = m \sin\varphi, \quad z = n\varphi,$$

bilden die windschiefe Schraubenfläche. Man bestimme für dieselbe a) die Gleichung, b) die Tangentialebene im Punkte x, y, z und deren Abstand vom Coordinatenanfangspunkt und c) die Hauptkrümmungsradien.

Lös. a) Die Gleichungen der Hauptnormale der gegebenen Schraubenlinie sind

$$(\xi - x)\sin\varphi = (\eta - y)\cos\varphi, \quad \zeta = z, \text{ oder}$$
$$\xi \sin\varphi = \eta\cos\varphi, \quad \zeta = n\varphi.$$

Hieraus folgt durch Elimination der Grösse φ als Gleichung der Schraubenfläche

$$\xi \sin\frac{\zeta}{n} = \eta \cos\frac{\zeta}{n} \text{ oder } \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tang}\frac{\zeta}{n}.$$

b) Die Gleichung der Tangentialebene wird

$$y\xi - x\eta + \frac{1}{n}(x^2 + y^2)(\zeta - z) = 0;$$

der Abstand der Tangentialebene vom Coordinatenanfangspunkte ist

$$D = \frac{rz}{\sqrt{n^2 + r^2}}, \text{ wenn } r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ gesetzt wird.}$$

c) Die Hauptkrümmungsradien können gefunden werden aus der Gleichung

$$R^2 - \left(n + \frac{r^2}{n}\right)^2 = 0.$$

Die Schraubenfläche hat somit in jedem Punkte zwei gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Hauptkrümmungsradien; ihre mittlere Krümmung ist gleich Null. Es ist diess eine Eigenschaft, welche den Minimalflächen zukommt, d. h. solchen Flächen, die bei gegebener Begrenzung die kleinste Oberfläche besitzen.

89) Aufg. Es soll die Gleichung der abwickelbaren Fläche gefunden werden, welche durch die Tangenten der Schraubenlinie

$$x = m\cos\varphi,\quad y = m\sin\varphi,\quad z = n\varphi$$

gebildet wird, und es soll bewiesen werden, dass die Normale dieser abwickelbaren Schraubenfläche mit der Z Axe einen constanten Winkel einschliesst.

Lös. Die Gleichungen der Tangente der gegebenen Schraubenlinie sind

$$\frac{\xi - x}{-m\sin\varphi} = \frac{\eta - y}{m\cos\varphi} = \frac{\zeta - z}{n}$$

oder

$$\xi - m\cos\frac{\zeta}{n} = -\frac{m}{n}\sin\frac{\zeta}{n}(\zeta - z),$$

$$\eta - m\sin\frac{\zeta}{n} = \frac{m}{n}\cos\frac{\zeta}{n}(\zeta - z).$$

Die Elimination der Grösse z aus diesen beiden Gleichungen ergibt als Gleichung der abwickelbaren Schraubenfläche

$$\xi\cos\left(\frac{\zeta}{n} - \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2-m^2}}{m}\right) + \eta\sin\left(\frac{\zeta}{n} - \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2-m^2}}{m}\right) = m.$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{\zeta}{n} - \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2-m^2}}{m} = \Theta$ und beachtet, dass $\eta\cos\Theta - \xi\sin\Theta = \sqrt{\xi^2+\eta^2-m^2}$, so findet man für die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Fläche mit den Coordinatenaxen bildet

$$X = \frac{n(m\cos\Theta - \xi)}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2-m^2(m^2+n^2)}},\quad Y = \frac{n(m\sin\Theta - \eta)}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2-m^2)(m^2+n^2)}},$$

$$Z = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

90) Aufg. Es soll das dreiaxige Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

untersucht werden.

Lös. Für einen Punkt x, y, z des Ellipsoids ist die Gleichung der Tangentialebene

$$\frac{x}{a^2}(\xi - x) + \frac{y}{b^2}(\eta - y) + \frac{z}{c^2}(\zeta - z) = 0$$

oder

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} + \frac{z\zeta}{c^2} = 1.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen den Abstand des Coordinatenanfangspunktes von der Tangentialebene im Punkte x, y, z mit D, so dass

$$D=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

so erhält man für die Cosinus X, Y, Z der Winkel, welche die Flächennormale in diesem Punkte mit den Coordinatenaxen einschliesst

$$X=\frac{xD}{a^2},\qquad Y=\frac{yD}{b^2},\qquad Z=\frac{zD}{c^2}.$$

Die Gleichungen der Normale werden

$$\frac{a^2(\xi-x)}{x}=\frac{b^2(\eta-y)}{y}=\frac{c^2(\zeta-z)}{z}.$$

Die Länge der Normallinie vom Berührungspunkte der zugehörigen Tangentialebene bis

zur YZ Ebene wird $=\frac{a^2}{D}$,

„ XZ „ „ $=\frac{b^2}{D}$,

„ XY „ „ $=\frac{c^2}{D}$.

Die Hauptkrümmungsradien sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$R^2+(a^2+b^2+c^2-x^2-y^2-z^2)\frac{R}{D}+\frac{a^2b^2c^2}{D^4}=0.$$

Die vier reellen Kreispunkte des Ellipsoids haben die Coordinaten

$$x=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\quad y=0,\quad z=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

91) Aufg. Es soll das Paraboloid untersucht werden, dessen Gleichung ist

$$z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}.$$

Lös. Die Gleichung der Tangentialebene wird

$$\zeta+z=\frac{x\xi}{a}+\frac{y\eta}{b}.$$

Bedeutet D den Abstand des Coordinatenanfanges von der Tangentialebene im Punkte x, y, z, ist also

$$D=\frac{z}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}},$$

so erhält man für die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Coordinatenaxen bildet

$$X = \frac{xD}{az}, \quad Y = \frac{yD}{bz}, \quad Z = -\frac{D}{z}.$$

Die Gleichungen der Normale sind

$$\frac{a(\xi - x)}{x} = \frac{b(\eta - y)}{y} = \frac{\zeta - z}{-1}.$$

Die Länge der Normale vom Berührungspunkt der entsprechenden Tangentialebene bis zum Durchschnitt

mit der YZEbene wird $= \frac{az}{D}$,

" " XZ " " $= \frac{bz}{D}$,

" " XY " " $= \frac{z^2}{D}$.

Die Hauptkrümmungsradien können bestimmt werden aus der Gleichung

$$R^2 - \frac{z}{D}(a + b + 2z)R + \frac{abz^4}{D^4} = 0.$$

Die Coordinaten der Kreispunkte sind, wenn $a > b$

$$x = 0, \quad y = \pm b\sqrt{\frac{a-b}{ab}}, \quad z = \frac{a-b}{2a},$$

wenn $b > a$ $\qquad x = \pm a\sqrt{\frac{b-a}{ab}}, \quad y = 0, \quad z = \frac{b-a}{2b}.$

92) Aufg. Es soll die Rotationsfläche untersucht werden, die entsteht, wenn die gewöhnliche Lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad z = 0$$

um ihren Durchmesser rotirt.

Lös. Die Gleichung dieser Fläche wird

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 - z^2).$$

Wenn man der Kürze wegen $x^2 + y^2 + z^2 = m^2$ setzt und dabei x als Function der beiden unabhängigen Veränderlichen y und z betrachtet, so wird

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{y.(a^2 + 2m^2)}{x.(a^2 - 2m^2)}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{z(a^2 + 2m^2)}{x(a^2 - 2m^2)},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{(a^4 - 4m^4).[(a^2 - 2m^2)x^2 - (a^2 + 2m^2)y^2] + 16a^4x^2y^2}{x^3.(a^2 - 2m^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial z} = \frac{yz.[16a^4x^2 - (a^4 - 4m^4)(a^2 + 2m^2)]}{x^3.(a^2 - 2m^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{(a^4 - 4m^4).[(a^2 - 2m^2)x^2 - (a^2 + 2m^2)z^2] + 16a^4x^2z^2}{x^3.(a^2 - 2m^2)^3}.$$

Die Gleichung der Tangentenebene wird

$$(2m^2-a^2)x.\xi+(2m^2+a^2)y.\eta+(2m^2+a^2)z.\zeta=m^4.$$

Es werden die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Coordinatenaxen bildet

$$X=\frac{x.(2m^2-a^2)}{a^2m},$$
$$Y=\frac{y.(2m^2+a^2)}{a^2m},$$
$$Z=\frac{z.(2m^2+a^2)}{a^2m}.$$

Die Gleichungen der Normale werden

$$\frac{\xi-x}{(2m^2-a^2)x}=\frac{\eta-y}{(2m^2+a^2)y}=\frac{\zeta-z}{(2m^2+a^2)z}.$$

Die Länge der Normallinie vom Berührungspunkt der zugehörigen Tangentialebene bis zum Durchschnitt

mit der YZEbene wird $=\frac{a^2m}{a^2-2m^2}$,

„ „ XZ „ „ $=\frac{a^2m}{a^2+2m^2}$,

„ „ XY „ „ $=\frac{a^2m}{a^2+2m^2}$.

Wenn man die Krümmungshalbmesser der respectiven kleinsten und grössten Krümmung mit R_1 und R_2 und die Coordinaten der bezüglichen Krümmungsmittelpunkte mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bezeichnet, so erhält man für diese Stücke folgende Ausdrücke:

$$R_1=\frac{a^2}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \qquad R_2=\frac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2+2x^2+2y^2+2z^2};$$

$$\alpha_1=\frac{(x^2+y^2+z^2+a^2).x}{3(x^2+y^2+z^2)}, \qquad \alpha_2=\frac{2a^2x}{a^2+2x^2+2y^2+2z^2},$$

$$\beta_1=\frac{(x^2+y^2+z^2-a^2).y}{3(x^2+y^2+z^2)}, \qquad \beta_2=0,$$

$$\gamma_1=\frac{(x^2+y^2+z^2-a^2).z}{3(x^2+y^2+z^2)}, \qquad \gamma_2=0.$$

93) Aufg. Die Lemniscate

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), \quad z=0$$

rotirt um die YAxe. Es soll die entstehende Rotationsfläche untersucht werden.

Lös. Die Gleichung dieser Rotationsfläche ist

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2-y^2+z^2).$$

Wenn man hier ebenso wie vorhin $x^2+y^2+z^2=m^2$ setzt, und dabei y als Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x und z betrachtet, so wird

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x(a^2-2m^2)}{y(a^2+2m^2)}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{z(a^2-2m^2)}{y(a^2+2m^2)},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{(a^4-4m^4).[(a^2+2m^2)y^2-(a^2-2m^2)x^2]-16a^4x^2y^2}{y^3(a^2+2m^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial z} = \frac{-xz[16a^4y^2+(a^4-4m^4)(a^2-2m^2)]}{y^3(a^2+2m^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{(a^4-4m^4).[(a^2+2m^2)y^2-(a^2-2m^2)z^2]-16a^4y^2z^2}{y^3(a^2+2m^2)^3}.$$

Die Gleichung der Tangentenebene an einen Punkt (x, y, z) wird

$$x(2m^2-a^2)\xi + y(2m^2+a^2)\eta + z(2m^2-a^2)\zeta = m^4.$$

Ferner werden die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Coordinatenaxen bildet

$$X = \frac{x(2m^2-a^2)}{a^2m},$$

$$Y = \frac{y(2m^2+a^2)}{a^2m},$$

$$Z = \frac{z(2m^2-a^2)}{a^2m}.$$

Die Gleichungen der Normale werden

$$\frac{\xi-x}{(2m^2-a^2)x} = \frac{\eta-y}{(2m^2+a^2)y} = \frac{\zeta-z}{(2m^2+a^2)z}.$$

Die Länge der Normallinie vom Punkte (x, y, z) bis zum Durchschnitt

mit der YZ Ebene wird $= \dfrac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2-2x^2-2y^2-2z^2}$,

„ „ XZ „ „ $= \dfrac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2+2x^2+2y^2+2z^2}$,

„ „ XY „ „ $= \dfrac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2-2x^2-2y^2-2z^2}$.

Wenn hier auch wieder die Radien der kleinsten und grössten Krümmung mit R_1 und R_2 und die Coordinaten der bezüglichen Krümmungsmittelpunkte mit α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 bezeichnet werden, so erhält man

$$R_1 = \frac{a^2}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \qquad R_2 = \frac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2-2x^2-2y^2-2z^2},$$

$$\alpha_1 = \frac{x(x^2+y^2+z^2+a^2)}{3(x^2+y^2+z^2)}, \qquad \alpha_2 = 0,$$

$$\beta_1 = \frac{y(x^2+y^2+z^2+a^2)}{3(x^2+y^2+z^2)}, \qquad \beta_2 = \frac{2a^2y}{a^2-2x^2-2y^2-2z^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{z(x^2+y^2+z^2+a^2)}{3(x^2+y^2+z^2)}, \qquad \gamma_2 = 0.$$

Druckfehler.

Seite 15. Beisp. 63 ist in der Antwort der Factor dx hinzuzufügen.
» 23. Zeile 5 v. u. fehlt am Ende die Klammer.
» 42. » 1 » u. am Ende der Zeile lies dy^2 statt dy.
» 50. » 6 » u. l. e^{xy} st. e^y.
» 57. » 11 » o. fehlen am Anfang die Worte: Es ist.
» 63. » 5 » u. lies: Eine Function $u = f(x, y, z, t, \ldots)$ u. s. f.
» 65. » 12 » u. lies $f^{(n-1)}(0)$.
» 73. » 11 » u. l. B_5 st. B^5.
» 79. » 9 » o. l. 1,37 ... st. 1,137 ..

Auf Seite 127 ist durch ein Versehen die unvollständige und zum Theil unrichtige Lösung der Aufgabe 93 aus den früheren Auflagen wieder abgedruckt worden. Die richtige Lösung ist folgende: Damit überhaupt von einer reellen Sehne die Rede sein kann, deren Endpunkte auf den Parallelkreisen liegen und von dem zweiten Pole gleich weit entfernt sind, darf $\sin\delta$ nicht kleiner sein als $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. 1) Ist $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) > \sin\delta > \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, so ergiebt sich für $\cos x = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\cos\delta$ ein Maximum der Sehne $= 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und für $\cos x = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\delta}$ ein Minimum der Sehne $= \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\delta}$. 2) Ist $\sin\delta > \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, so ergiebt sich wieder für $\cos x = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\cos\delta$ ein Maximum der Sehne $= 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, dagegen für $\cos x = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cos\delta$ ein Minimum der Sehne $= 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

Seite 167. Zeile 14 v. u. lies $n = -\frac{1}{2}$, $r^2 = \frac{a^2}{\varphi}$, statt $n = -1$, $r = \frac{a}{\varphi}$.
» 167. » 13 » » lies $r = a\sqrt{2}$, statt $r = \sqrt{2a}$.
» 168. » 13 » u. l. $\sqrt{\frac{b}{a}}$ st. $\sqrt{\frac{\ }{a}}$.
» 177. » 5 » u. ist bei S_t das Zeichen — wegzulassen.
» 182. » 10 » u. lies $y = -x - \frac{1}{3}a$ statt $y = -x - a$.
» 195. » 1 » u. lies $4r\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{3}{2}\varphi$ statt $4r\sin\frac{1}{2}\varphi\sin\frac{3}{2}\varphi$.
» 207. » 6 » u. lies je nachdem x negativ oder positiv ist.



